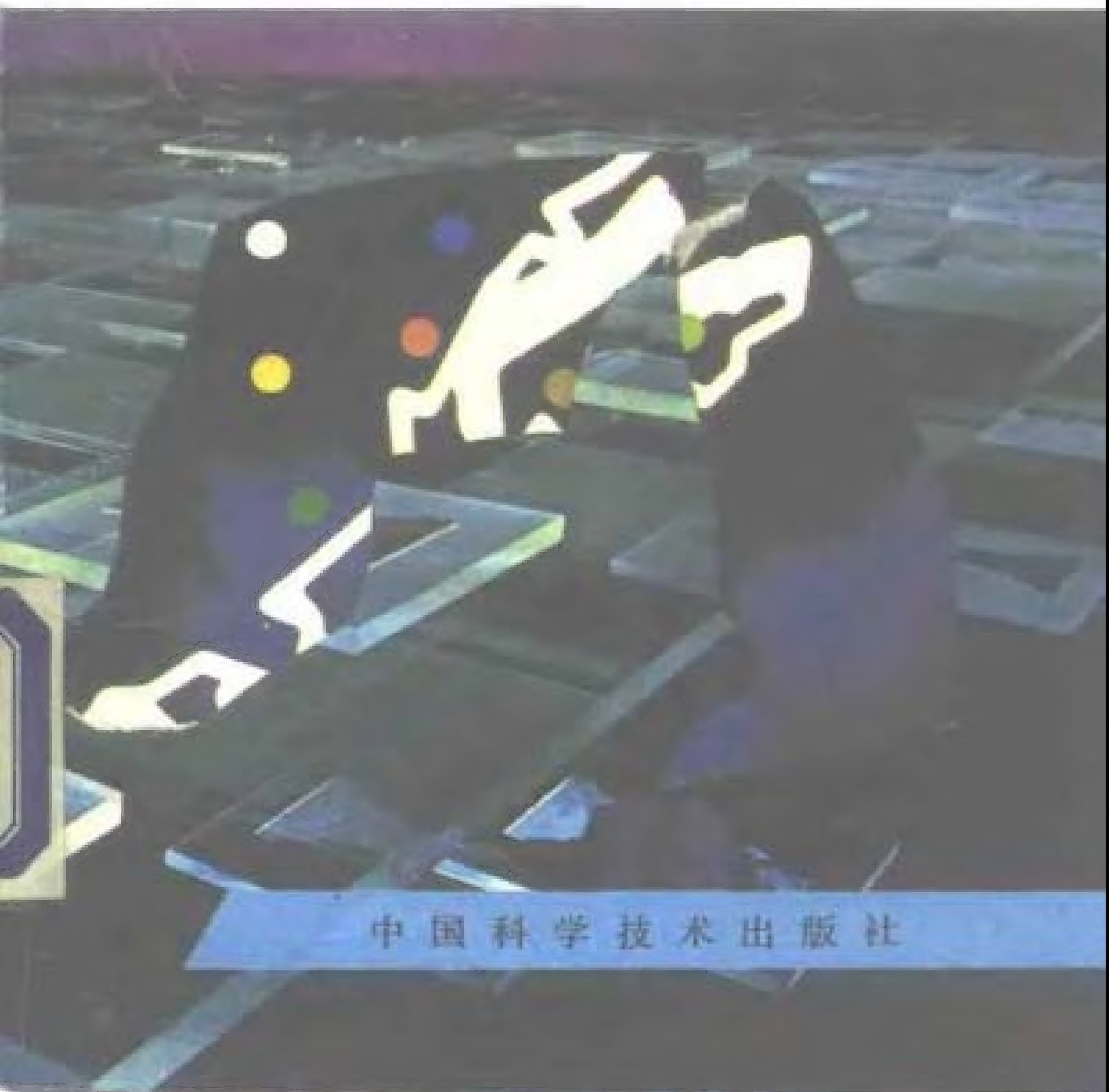
孔慧英　梅智超　编著

现代数学思想概论



现代数学思想概论

孔慧英　梅智超　编著



中国科学技术出版社

内 容 提 要

本书按现代数学理论体系，阐述现代数学思想发展及其对有关基础学科、现代技术的作用与影响。它的内容涉及现代数学的各个方面，如微积分、微分方程、数论、非欧几何学、拓扑学、抽象代数学、复变函数、泛函分析、概率论、数理统计、数理方程、数理逻辑、运筹学、计算数学以及模糊数学、突变理论和分形几何学等等，并探讨了现代数学与社会科学、社会发展的关系，现代数学的特点和发展趋势。

全书资料充实、系统性强，且通俗易读，适于非数学专业的大学生、研究生和哲学工作者参考阅读。

2069136

（京）新登字175号

现代数学思想概论

孔慧英　梅智超　编著

责任编辑：孙　倩

封面设计：胡焕然

技术设计：王守祯

*

中国科学技术出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

北京昌平百善印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米　1/32　印张：7.75　字数：216千字

1993年12月第1版　　1993年12月第1次印刷

印刷：1—3,000册　　定价：7.80元

ISBN 7-5046-0876-9/O·20

前　言

数学是一门古老而常新的基础学科。几千年来，数学经过漫长的发展，已从初等数学、变量数学发展到现代数学。特别是近几百年来，随着科学技术的迅速发展，数学也朝气蓬勃地发展着，表现出旺盛的生命力。19世纪初产生了非欧几何、群论等学科，标志着现代数学的诞生，随后又产生了集合论、拓扑学、抽象代数、数理逻辑等许多新学科，20世纪又发展运筹学、控制论、信息论、系统论等新学科，尤其是电子计算机的出现，是数学史上的大事，它已显示并将会极大地推动数学的发展。数学与其他领域相互渗透又出现许多边缘学科与交叉学科，形成一门系统庞大、分支众多的现代数学。

数学是认识世界和改造世界的有力武器。它是掌握科学技术的一把钥匙，历次产业革命的主体技术都与数学的新理论和新方法有密切关系，显示了数学理论转化为生产力的巨大功能；它是现代社会经济管理的有效工具，现代社会经济管理要求精确化、科学化，这就必须运用数学；数学还具有教育功能，学习数学能锻炼人的抽象思维能力、逻辑推理能力和辩证思维能力，它是人们的"智力的体操"，这对自然科学和社会科学的研究是必要的训练。随着各门科学数学化的发展趋势，数学更加成为每个现代受教育者不可缺少的文化素养。加强数学教育，用现代数学知识武装人们头脑，这对于开发智力，提高我国民族的科学水平和思维能力，紧紧跟上现代科学与高技术前进步伐，对促进社会主义建设，具有重大意义。近几年来为适应教学特别是自然辩证法专业研究生方面的教学需要，开展了现代数学思想、数学哲学、数学与社会发展的专题研究，这就是为什么写《现代数学思想概论》的原因。

本书贯彻着数学史与数学知识相结合、数学与哲学相结合、

数学与社会相结合的精神，作者力图运用辩证唯物主义观点研究现代数学的一些重要学科的数学思想、它的来源和发展，从而丰富哲学内容，具有一定的学术理论意义；运用历史唯物主义与科学社会学观点研究现代数学与社会发展的相互作用的关系，促使人们重视数学教育，推动社会主义建设，具有实际意义。本书内容包括以下九个方面：（1）数学的研究对象、基本内容和意义，数学发展史简述（第一、二章）；（2）现代数学的各个学科的主要成就，它的主要数学思想，以及它的应用（第三～十四章）；（3）数学基础和数学哲学（第十五章）；（4）现代数学与社会发展的相互关系，数学与社会科学(第十六、十七章)；（5）现代数学的特点和发展趋势(第十八章)。此外，还特请梅智超同志编写第八、九、十二章。全书主要由孔慧英同志编写并负责统稿定稿。

由于本书范围较广，体系较完整，思想观点较新颖，而个人水平却有限，缺乏经验，许多是新的研究课题，所以，书中可能存在缺点和问题，欢迎同志们批评指正，以便进一步研究和修改。

本书是在吴义生教授建议下写成的，写作过程中曾得到他和教研室同志的支持和帮助，谨此深表谢意。

本书的有关章节曾分别得到冯绪宁教授、李培信教授、龙瑞麟教授、姚景齐副教授、张锦文教授、张维弢副教授、徐广善教授、袁向东副教授和陶波教授的精心审阅和指点；特向他们致以衷心的谢意。

本书在写作过程中曾参考和引用了许多出版物的不少论点和资料，除书末列有少数主要参考文献外，其余恕不一一列举，在此向有关作者和出版社一并表示感谢和歉意。

孔慧英　梅智超

1991年11月于北京

序

数学是人类文明的一个重要组成部分。数学是各门科学赖以精确化的工具和理论基础；是思想启蒙和思维训练的必修课程。数学又是各种哲学思想驰骋和交锋的逐鹿之地。数学不仅是数学家的事，而民族的素质、国家的兴盛都和数学水平的提高密切相关。本书的出版是一件大好事。希望它能为推动各行各业的朋友，特别是领导工作者和社会科学工作者，都来学习数学、掌握数学和运用数学，从而更好地为社会主义建设服务竭尽自己的一点力量。

在国内，有关数学的教科书已经很多，优秀的专著不断问世，涉及某个分支或某个具体问题的科普著作也陆续出版。但是，全面介绍各数学分支的综合性著作尚难见到，运用哲学和自然辩证法的基本原理来探讨数学思想的论著尤其难见，而这正是本书最主要的两个特点。数学是一门高度抽象的科学，它像一座金字塔，从下向上望去，塔顶似在云雾之中，不经过一级一级的艰难攀登，难以窥见塔顶的真实面貌。在许多学科中，某些最新成就只需用几句话就可向外行讲清楚。而在数学中，这种情况只是例外，隔行如隔山的现象在数学中最为明显。也许没有一个数学家愿意耗用自已的宝贵时间去写这样一本可能是吃力不讨好的书。如今由哲学工作者来做这件事，其难度是可想而知的。鉴于这一点，本书存在的种种不足之处也就可以理解了。更何况从哲学和自然辩证法的角度看，这还是一项以数学思想为对象的研究工作。路总是要有人先走一步的。但愿这一步能取得较好的效果，为以后能跨出更好更坚实的步子积累有益的经验。

陆汝钤

目　录

第一章 绪 论

数学是古老而常新的基础科学，至今它还在朝气蓬勃地发展着，表现出旺盛的生命力。人们认识世界和改造世界都要运用数学，数学是掌握科学技术的一把钥匙，是现代科学技术发展的有力工具。现代科学技术发展的一个重要趋势就是各门科学的数学化，数学对于科学技术的发展起着极其重要的作用。数学还广泛地渗透到社会生产和社会管理的各个领域，促进社会经济发展，对人类文明和社会进步也有其重要的作用.

一、数学的研究对象

世界上的万事万物都包含质和量这两个方面。人们在实践中要精确地认识事物，做到胸中有数，就要认识事物的质和量的变化规律。

"量"贯穿于一切领域之内，因此数学的应用也渗透到一切科学领域之中。凡是研究量、量的关系、量的变化、量的关系的变化、量的变化的关系的时候，就少不了数学。量的变化中还有变化，而这种变化一般也是用量来刻划的。量与量之间有各种各样的关系，各种各样不同的关系之间还可能有关系。各种各样的关系中还有主从之分，可以从一些关系推导出另一些关系。所以数学还研究变化的变化、关系的关系、共性的共性．不断深化，向前发展．

事物的量，是指它们的数量关系和空间形式的特征和变化。恩格斯说："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。"[1] 数和形这两个基本概念，是人们通过长期实践活动，从现实世界

---

[1] 《马克思恩格斯选集》，人民出版社，1972年版，第3卷第77页。

中抽象、概括出来的，并且在运用过程中又回到实践中。

“数”是各种各样事物不同量的共性。最初人们在实践中常把耳朵、眼睛和“2”联系在一起，我国的“2”和“耳”同音，“5”和“手”是同义词。随着生产和科学的发展，人们不断扩大数的领域，逐渐舍弃具体事物，才概括出抽象的数的概念。人们最早运用的是正整数和自然数：1、2、3、4、5，……，通过这些数才能比较出各种事物的量的大小，量的变化，人们在实践中逐渐学会计算物体的大小。后来逐步引进分数、小数、负数、无理数等概念而形成了实数系统；引进虚数概念而形成了复数系统；近世代数中又引进与通常的数很不相同的量而构成各种代数系统，如群、环、域等等，这些代数系统的元素已失去“量”的本来意义，但相互之间却能进行与数相类似的运算，因而可看作是数的扩张。此外，在集合论中，人们还引进所谓“超限数”而将数的概念从有限推广到了无限。

“形”是各种物体存在的躯体与外壳，人们在实践活动中，首先注意到物体的大、小、方、圆等形状，人们常把圆同日、月、车轮联系在一起，把方同一块方石、田地联系在一起，把直线同抓紧的绳子、直的箭联系在一起。随着生产的发展，不断地把形的概念抽象化，才形成了抽象的点、线、面概念。并在实践中总结出计算物体的长度、面积、体积等的方法。研究图形的质量性质（长度、角度、面积、体积等），而形成了欧几里得空间的概念；研究图形的透视性质而发展出射影空间的概念；研究图形的连续性质又形成了拓扑空间的概念。空间观念还沿着其它方向扩张着，人们不仅研究通常的二维和三维空间，而且考虑多维乃至无穷维空间；不仅研究平直的欧几里得空间，而且考虑各种“弯曲”的“非欧空间”。现代数学已将越来越多形形色色的“空间”和它们的几何包括到所研究的对象中来。所以，数学是以数与形的性质、变化和它们的关系作为研究对象，探索它们的有关的规律，给出对象性质的系统分析和描述，在这个基础上分析实际问题，给出具体的解答。

数和形两个基本概念是整个数学的两大柱石，整个数学就是随着这两个概念的提炼、演变与发展而不断深化的。在早期数学中，以研究物质世界量、量的关系为主要特征的，属于算术与代数的范畴。以研究现实世界空间形式和形的关系为主要特征的，属于几何学的范畴。17世纪研究变量把数与形结合起来，产生解析几何与微积分，以后形成了研究形、数关系的分析学。这样，几何学、代数学、分析学三大类数学，构成了整个数学的主体和核心。

随着数学的迅速发展，数学的研究对象越来越扩张，就变得越加抽象，从而越加远离现实，因此就会产生数学对象与客观世界的关系问题。一般说来，大部分数学分支中那些最初最老的问题，都是起源于经验，是由外部世界所提出。数与形是人们长期实践中概括出来的，欧氏几何、微积分的产生也具有明显的实践背景。表面极度抽象的多维空间概念，也是在研究多个自由度的质点力学的基础上建立的。正如法国数学家傅里叶（Jean-Baptiste-Joseph Fourier 1768～1830）所说：对自然的深入研究，是数学发现最丰富的源泉。但是，数学的发展对于现实世界还具有相对的独立性，一门数学理论一经建立，便可以不受客观世界影响，仅仅借助于数学内部逻辑推理而独立向前推进，数学中新理论的产生有时只是由于数学内在逻辑的需要，非欧几何与群论的产生就是如此。因此，数学研究的对象，不仅是直接从现实世界抽象出来的数量关系与空间形式，而且包括那些由数学内部逻辑定义的各种可能的"数量"关系与"空间"形式，所以，数学是外部经验世界与内在逻辑结构反复的相互作用的过程。

二、数学的基本内容

数学的内容十分丰富，数学已经形成了一门系统庞大、分支众多的基础学科。分支众多就是数学包含了许多具有基本理论、自成系统的学科，就象一棵根深叶茂的大树一样，以粗壮的树干向周围分出许多粗细不等的枝叉。数学有许多分支，迄今，还

没有一个公认的划分原则。但就数学和现实生活的联系来说，大体分为两大类，即纯粹数学与应用数学。

纯粹数学研究从客观世界中抽象出来的数学规律的内在联系，也可说是研究数学本身的规律。它大体上分为三大类，即研究空间形式的几何类，研究离散系统的代数类，以及研究连续现象的分析类。

属于第一类的，如微分几何、拓扑学。微分几何是研究光滑曲线、曲面等，它以数学分析、微分方程为研究工具。在力学和一些工程问题（如弹性壳结构、齿轮等方面）中有广泛的应用。拓扑学是研究几何图形在一对一的双方连续变换下不变的性质。这种性质称为"拓扑性质"。如画在橡皮膜上的图形，当橡皮膜受到变形但不破裂或折迭时，有些性质还是保持不变，如曲线的闭合性，两曲线的相交性等。

属于第二类的，如数论、近世代数。数论是研究整数性质的一门学科。按研究方法的不同，大致可分为初等数论、代数数论、几何数论、解析数论等。近世代数是把代数的对象由数扩大为向量、矩阵等，它研究更为一般的代数运算的规律和性质，它讨论群、环、向量空间等的性质和结构。近世代数有群论、环论、伽罗瓦理论等分支。它在分析数学、几何、物理、化学等学科中有广泛的应用。

属于第三类的，如微分方程、函数论、泛函分析。微分方程是含有未知函数的导数或偏导数的方程。如未知函数是一元函数，则称为常微分方程，如未知函数是多元函数，则称为偏微分方程。函数论是实变函数（研究实数范围上的实值函数）和复变函数论（研究在复数平面上的函数性质）的总称。泛函分析是综合运用函数论、几何学，代数学的观点来研究无限维向量空间（如函数空间）上的函数、算子和极限理论。它研究的不是单个函数，而是具有某种共同性质的函数集合。它在数学和物理中有广泛的应用。

应用数学是研究如何从现实问题中抽象出数学规律以及如何

把已知的数学规律应用于现实问题的。数理方程是用微分方程来描述物理、工程技术及其它领域中发生的运动过程及现象，例如水面上波的扩散和物体中热的传导。运筹学用数学方法来协助人们找出解决各种问题的最优方案。例如，怎样安排工序可使工程周期最短，怎样剪裁钢板可使材料最省。概率论用数学方法从客观存在的偶然现象中找出必然规律。例如，根据历史资料分析发生地震的可能性，根据水文记录预测洪水汛期，数理统计用数学方法根据抽样检查判定某种产品的质量。数理统计使人们能够通过概率来判断某种事物发生的可能程度和正确程度，算出发生错误判断的可能性。这就使得我们所作的判断既有分寸又有力量，既能保证足够的正确性和工作质量，又能最大限度地节省调查工作的人力、物力和时间，达到多快好省地开展工作的目的。计算数学是在某一客观事物已有确切的数学描述后，研究如何把它解算出具体结果来。它的主要任务是找出各种新的计算方法，其特点是：(1) 近似。现实生活中的大部分数学问题是不能求得精确解的。(2) 快速。解同一个问题，好方法和“笨”方法所需要时间可相差几百、几千倍。甚至有这样的数学问题，用“理论上完善”的笨方法去解，100年也算不出来。电子计算机的出现，给计算数学带来了革命性的变化，许多过去做不到的事，现在能做到了。例如在几小时内算出过去要几年才能算出的天气预报，甚至在几秒钟内算出正在飞行的导弹的偏差，以便立即校准它的轨道。

随着科学技术迅猛的发展，数学各门分支的内容也在迅速地发展，现代数学的许多部门常常和其他学科相互交叉、相互渗透，又形成了一门门新的分支学科。但是有许多新的学科，从它的内容、方法、意义和应用范围来说，已经不单单属于数学的范畴了。比如控制论、系统论、信息论就是数学和其他学科相互渗透、凝合而成的新兴边缘学科。还有生物学与数学相结合产生了生物数学；地质学用数学理论和方法研究各种地质现象的数量关系，形成了数学地质学；数学和经济学相互渗透，产生了数量经济学；数学与社会学相互渗透，产生了定量社会学；历史学用数学方

法研究各种历史问题，产生了计量历史学；数学与语言学相互渗透产生了数理语言学；数学与逻辑学相互结合产生数学逻辑学等等许多新兴的交叉学科，它推动各行科学走向定量化与精确化。

生产和科技事业的发展，总是要求数学帮助解决新产生的问题，一些数学分支结合某些实际问题，又可能促使它向前发展，得出新的理论。但是，正像树干上新长出的嫩芽一样，一开始，很难预言这个小嫩芽会不会长成树枝，通过实践应用与检验，有好些小嫩芽茁壮成长，如模糊数学、突变理论、分形几何学等等新兴学科。

所以，数学越发展，它的领域越广阔，分支越众多，应用越广泛，而它的基础也就更加深化、更加牢固。正如一株苍劲，粗壮的樟树在生长过程中，新的树层使老枝变粗，长出新枝，枝叶往上长高、根又往下长深一样。数学在它的发展过程中把新的材料添加在已经形成的领域中，形成新的方向，升到新的高度，产生广阔的边缘学科和交叉学科，并且彼此互相渗透，而它的领域扩大，基础更加深化，更加坚实。

三、数学的应用

现代数学已经渗透到各个领域，它在科学研究、生产建设和国防建设，以至日常生活中发挥重要作用。正像华罗庚教授(1910～1985) 所说："宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁、无处不用数学"。❶

1. 现代数学是掌握现代科学技术的钥匙

现代数学为各门自然科学提供有效的计算方法。一门科学从定性的描述进入到定量的分析和计算，是这门科学达到比较成熟阶段的重要标志。在科学史上，自然科学的数学化，从低级物质运动形式发展到高级物质运动形式，与此相适应的，从力学、天文学、物理学等最早开始数学化，它们都是由于将观测、实验与

---

❶ 华罗庚：《数学的用处与发展》，载于《现代科学技术简介》，科学出版社，1978年版。

数学方法相结合以后才迅速成长为"精密科学"的。近代、现代的许多学科都是通过大量运用数学方法而走向定量化、精确化。科学理论的一个重要特征就是具有预见性，而这种预见性一般是通过数学方法来表现的。一些比较准确的科学预言，就是依据科学理论进行数学的推导和计算而获得的理论结果。因此，科学理论通过自己的预见性指导实践，同时又通过预言之能否实现和是否准确地实现来接受实践检验，都是离不开数学计算的。

现代科学技术，像建筑工程、水利工程、油田开发、海洋开发，以及建造原子反应堆和高能加速器等等，都必须进行周密的理论推导和准确的数值计算。若在计算上出了差错，不但不能达到预期的目的，而且还会造成惨重的事故。

自然科学的数学化由来已久，早在300年前，笛卡儿（Rene Descartes，1596～1650，法国）、伽利略(Galilei，Galileo，1564～1642，意大利)、开普勒（Kapler，Johannes，1571～1630，德国)、牛顿（Isaac Newton 1642～1727，英国）已把数学运用于天文学、力学、物理学，使这些科学成为精确科学。例如，法国青年天文学家勒威耶(Leverrier Urbain Jean Joseph，1811～1877）在探测到天王星运动的不规则性，偏离行星轨道之后，经过一年多的计算，提出有一颗未知的行星影响到天王星运行的假说，于1846年9月，写信给德国柏林天文台助理员加勒（Galle，Joham Gotlfried，1812～1910，德国)。信中说："请你把望远镜对准黄道上的宝瓶星座，就是经度360度的地方，那时你将在那个地方1度之内，见到一颗n等亮度的星。"加勒按勒维烈所指方位进行观察，果然在所指位置不到1度的地方，找到了一颗在星图上没有的星——海王星。数学计算促进了海王星发现。

在物理学研究中，牛顿之所以能把地面上物体间的引力和天体间的引力统一起来认识，麦克斯韦（Maxwell，James Clerk，1831～1879，英国)能把光波和电磁波统一起来认识，都是由于借助数学，即发现了这些事物之间有共同的数学关系，才启发了他们的思路。牛顿曾以欧氏几何学为工具，建立了他的力学体系。

爱因斯坦（Einstein,Albert，1879～1955，美籍德国人）利用非欧几何学，将狭义相对论发展为广义相对论，而相对论对物理学的发展产生了重大的影响。

化学在过去一直被称为一门"经验科学"，从20世纪以来，也开始运用数学，化学的数学化开始于拉瓦锡（Lavoisier,Antoine Laurent，1743～1794，法国）的定量分析，他首次把一次方程式引进化学反应质量守恒的规律。后来门捷列夫（Менделеев,Менделеев Дмитрий Иванович,1834～1907,俄国）的元素周期律，也借助应用数学，才有了对许多未知元素的现在化学中的晶体研究，需要应用"群论"的方法来研究分子的全部对称性，以及哈密顿（William Rowan Hamilton，1805～1865,英国)计算符和点群对称元素间的对易规律。量子化学、结构化学、化学统计都需要运用数学与电子计算机，开始使化学从经验科学逐渐向理论科学和精确科学过渡。

原来与数学没有关系的生物学，现在也开始数学化，生物学的数学化最早开始于孟德尔（Mendel, Gregor Johann，1822～1884，奥地利）的遗传学说，因为他首次用数学的排列组合关系表示生物遗传性状出现的规律。在分子生物学研究中，发现脱氧核糖核酸的螺旋结构的X射线结构分析法，就需要应用数学分析的傅里叶变换公式，从衍射算出被检物体的真正像来。在胰岛素的研究中，由于复杂的主体模型以及生物的遗传密码，都离不开数学计算。现在研究生理现象、神经活动、遗传学及生态学都需要数学和电子计算机，如生态学的变量多而复杂的数学模型，需要靠电子计算机来计算，生态系统的调节和管理还要应用控制论，生态环境的分类还要用集合论和模糊数学。由于用数学方法来研究自然界中的生态系统，建立生态模型，从而产生数学生态学。用统计学的方法研究生物界的随机现象，为生物学提供了有效地分析处理观察资料的方法，称为生物统计学。用概率论的方法来研究各种不同情况下生物群体内基因的变化，称为群体遗传学。用统计学的思想和方法来研究生物的数量性状遗传规律，称

为统计遗传学。而群体遗传学和统计遗传学都是数学和遗传学相结合，又把它们称为数量遗传学。数学与生物学相互结合产生了一门新兴的生物数学。

地学、地震预报等也需要运用统计数学，概率论和模糊数学，可以提高预报的准确性。由于运用数学和电子计算机，使气象预报走上定量化的轨道。地质学正在考虑用应用数学方法来研究各种复杂的地质过程，甚至考虑把地质过程变换成数学模型，通过电子计算机模拟地质过程的发展变化。数学与地学相结合产生数学地质学。所以，数学已成为自然科学的强有力的工具。

2．现代数学是国防现代化的有力的理论工具

现代国防建设，发射火箭、导弹、人造卫星等航天技术，都要进行周密的理论和准确的数值计算，都离不开数学和电子计算机，若在计算上出了差错，就会造成惨重的事故，会带来严重的经济损失。1970年我国发射了第一颗人造卫星，就有数学工作者参与大量复杂的计算，预测其飞行轨道和着陆点。

在战争时期，可应用运筹学的博奕论、决策论、规划论来研究人力、物力如何使用；寻找一种搜索策略，使自己的驱逐舰以"最优"方式找到威胁自己运输队的敌艇，还要考虑如何配合使用这些工具，收到最大的效果。在军事方面，过去主要是考虑武器如何使用，供应如何补充，而现在则主要考虑在未来战争中如何设计和选择武器，并事先对未来战争作出各种可能的估计。

3．现代数学为新技术革命提供了有力的武器

目前，以电子计算机为核心的新技术革命即将兴起，它将促使现代科学技术取得空前的大发展，并使现代科学技术的内部结构日益复杂、相互渗透、相互联系，并向整体化方向发展。现代科学技术已经形成一个具有主体结构的纵横交错的大网络系统。这个大系统正向着数学化的方向发展，并要求逐步向产生、变换、运输、测量和利用信息的中心转移，迫切需要运用现代数学。这样，计算数学、运筹学、概率论、模糊数学、突变理论等现代数学的新分支，为新技术革命提供了有力的工具和理论基础。

4、现代数学是提高经济效益的科学方法

现代生产建设，都需要广泛地应用运筹学来研究工业、农业、手工业、交通、渔业、林业等方面，由于实际生产上的需要和刺激，出现了许多新的学科，如优选法、统筹法、排队论、库存论等。我国著名数学家华罗庚推广优选法和统筹法（又称双法）运用到生产实践中去，对国家作出了很大的贡献。例如，解放牌汽车优选了化油器的合理尺寸，1辆汽车1年可节油1吨左右，全国现有民用汽车都来推广优选法，1年就可节油60余万吨。粮食加工采用优选加工工艺，一般可提高出米率1.23%，提高出粉率1%，若按全国人数的口粮加工总数计算，1年等于增产几亿斤粮食。天津碱厂纯碱生产优选后，每年节约粗盐9千吨，价值27万元。内蒙古推广运用"双法"以来，据对80个企业进行调查结果表明，每年可增产节约800万元。四川省推广用"双法"仅4个月，即增产节约2亿元。湖南军工生产某项产品，在90道工序上优选了200多个项目，坚持使用7年，每年节约120万元。广西粮食局应用优选法，473项成果增产大米777万斤，油脂14万斤。运用"双法"对两淮煤炭开发论证，开发规划可提前2年完成，提前1年即为国家多生产4000万吨煤。广州东方宾馆、白天鹅宾馆应用统筹法组织施工，缩短工期，提前开业，分别增收外汇200多万元，并节约贷款利息1千万港元，等等。"华氏双法"在国计民生中所产生的经济效益和社会效益，是数学转化为生产力的功能的重要表现。

总之，人们的生产和生活离不开现代数学，现代数学已成为现代科学技术、现代生产经营、现代生活的强有力的武器。

第二章　数学发展史简述

数学的产生与发展经过了漫长的历史过程，它是随着人们生产技术与科学文化的发展而不断发展起来的，从数的基本概念的产生至今已有 5 千多年的历史了。所以，数学是一门古老的基础学科。

一、数学的萌芽

人类在远古时代长期采集狩猎和捕鱼等生产实践过程中，逐渐产生"多"与"一"概念。对于数"二"的出现，可能是由于用双手各拿一件物品；表示"三"的时候，人们领悟到可以把第三件物品放在自己的脚边，"三"的特征就是举起双手和指定一只脚；"四"可用两只手和两只脚来表示，等等。在缓慢发展中，人们逐渐地抛弃了将被数的物品拿在手中或置于脚边的做法，慢慢地抽象出数的概念。

公元前十几个世纪，人类历史从铜器时代过渡到铁器时代。铁器的使用，大大促进了生产力的发展，使社会财富增加，刺激产品交易，由于社会经济生活的需要。人们越来越多地要计算产品的数量和劳动时间的长短，测定建筑物的大小和丈量土地的面积等等。人类在长期的生产实践中积累了许多数学知识，并逐步形成了数的概念，导致了记数，而记数则是伴随着计数术的发展而发展的。从最早的屈指计数、结绳记数，到在木棍或骨片上刻划计数，再到语音计数，又经历了漫长的世代，大约到距今 5000 多年前，终于出现了书写计数及相应的记数系统。下面列出几种世界上最早的记数系统（图 2-1）。其中中国筹算数码是世界上最早使用的十进位值制数码系统。

记数系统使数与数之间的运算成为可能。这样，初等算术便

古埃及象形数字（公元前3400年左右） 1 2 3 9 10 20 30 100 200 1000 19

巴比伦楔形数字（公元前2400年左右） 1 2 3 4 9 10 11 81

中国甲骨文数字（公元前1600年以后） 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 100 1000

中国筹算数码（公元前500年左右）

纵式

横式 1 2 3 4 5 6 7 8 9

古印度婆罗门数字（约公元前300年） 1 2 3 4 5 6 7 10 20 30 100 122

图 2-1

在几个古老的文明地区发展起来。在流传至今的古埃及纸草书和巴比伦泥版文书中，记载了大量算术问题，它们的解答涉及整数与分数的四则运算。对中国古代典籍的分析也表明，早在西周时期，"数"（即初等算术）已形成一门学问而被列为贵族子弟必须学习的"六艺"之一。由于田亩度量和天文观测的需要，引起几何学的初步知识，几何学与算术的产生相仿，最初的几何知识也从人们对形的直觉中萌发出来。史前人大概首先是从自然界本身提取几何形式（例如他们注意到圆月与挺松在形象上的区别），并在器皿制作及绘画装饰中加以再现。经验的几何知识随着人类的实践活动而不断发展。

但是，这些知识是片断的、零碎的，没有形成严整的理论体系。更重要的是缺乏逻辑因素，基本上还看不到命题的证明。数学区别于其他自然科学的最突出的特点之一是演绎推理和公理法，在这一时期还没有显露出来。当时它只是解答各类具体问题的实用知识，几何只是各种简单几何图形面积、体积的计算法

则，本质上不过是算术的应用，还没有形成独立的学科。

二、初等数学的产生

公元前6世纪到16世纪是初等数学的产生和发展时期。初等数学研究事物的常量性质和不变图形，即常量数学。它包括代数学和几何学。

几千年来，人类在长期生产劳动实践中，逐步建立和发展了事物的数量和空间形式的概念，获得了许多数学知识。农业、建筑业、水利灌溉工程、宫殿，教堂、金字塔、航海、商业的发展，推动了数学的发展，从而产生了几何、代数等初等数学。

1．希腊时期

几何学发源于古埃及。埃及尼罗河两岸，土地肥沃，农产丰富。但是尼罗河水每年有定期的泛滥。洪水期田地被淹没。水退后田地界限被毁。为了解决土地争执，"测地学"产生了。现在所用的"几何学"这个名词，便是由"测地学"一词音译而来。农业和畜牧业的发展，要求掌握四季变化。于是除了"测地"。还要"测天"，天文学应运而生。天文学的第一步，就要求测定东西南北。古代人很早就知道用北极星定北，用其相反方向定南。在此基础上，为要找到东西方向，则要作南北方向的垂直线；为作南北方向的垂直线，就用三条绳子。各长三、四、五个单位。把它们组成一个三角形，其中长、五个单位的那条绳子所对的角，就是直角。于是，勾股弦这一著名定理出现了。古埃及积累了丰富的几何知识，但有待于系统总结和提高。

公元前6世纪，希腊在地中海一带成为文化昌盛的地区，在生产、航海、商业以及社会生活发展的影响下，人们研究自然界的兴趣增加了，探索客观现实及其发展规律的愿望逐渐代替了宗教神话的世界观。

这时在数学方面已积累起来大量的资料，有待进一步整理和深化。一些希腊学者开始尝试对命题加以证明。所谓证明，就是借助一些真实性已经确定的命题来论证其他命题真实性的思想过

程。早期游历埃及的希腊学者接触了那里的经验几何法则并产生了证明这些法则的想法。他们以泰勒斯为代表。证明命题，是希腊几何学的基本精神，也是数学史上一件大事。后来古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580～500）学派的成员们不仅证明了不少几何命题，而且还开始按一定的逻辑顺序把已知命题排列起来。从此数学由具体的、经验的阶段过渡到抽象的理论的阶段，数学经过这样带根本性的变革逐渐形成一门独立的、演绎的科学。其主要代表人物是古希腊杰出数学家欧几里得(Euclid，约公元前 330～前 275)，古希腊，终于编成一部《几何原本》名著，共有 13 卷，他总结了古代劳动人民在实践中获得的几何知识，加以系统化，并把人们公认的一些事实列成定义、公理和定理构成的演绎几何体系，用它们来研究图形的性质，创立了欧氏几何学，《几何原本》是两千多年来传播几何知识的标准教科书，在传授几何知识方面起了巨大作用。除了欧几里得几何外，希腊数学的丰富遗产还包括：复杂几何图形面积、体积的计算；圆锥曲线论；三角学；无理数的发现和不定方程求解等，对后世数学有深远的影响。

2. 东方时期

希腊数学之花在公元初即趋凋谢，代之而起的是中国、印度和阿拉伯地区东方数学的繁荣。东方数学具有与希腊数学明显不同的特征，即着重计算与算法，而不讲究命题的演绎证明。

在中国、由于天文、水利、建筑、农业生产的发展，古人也有简单的几何概念，例如甲骨文中，已出现“规”、“矩”二字和“田”字。出土的商周青铜器上的花纹，有着美丽而准确的几何图案。传说夏禹治水就是右手拿着测量用的绳子，左手拿着圆规和曲尺。这说明早在4000多年前，中国人已经有了几何方面的一些基本知识，在我国最早的一部数学著作《周髀算经》里，记载了不少几何知识。该书第一章，记载了公元前 1100 多年的西周时代数学家商高（生卒年代不详），明确提出的“勾三股四弦五”的勾股定理。我国古代的几何研究没有形成完整的公理演绎系统。但

我国古代数学在代数学方面却有很大成就，我国的一部数学专著《九章算术》，包括算术、代数和几何知识，已引进了负数概念及其运算法则，建立了相当于现代消去法的一次联立方程解法。记载了开平方、开立方法。从魏晋南北朝到宋元时代，中国数学家又独立创造出一系列重大的算法，其中包括：刘徽(魏晋间约225～295)、祖冲之（南北朝约 429～500）计算圆周率的“割圆术”；公元 4 世纪我国数学名著《孙子算经》中，提出著名的“中国剩余定理”，即解一次余式的“孙子算法”，后为宋代数学家秦九韶(约1202～约1261）推广为系统的”大衍求一术”；求解高次方程数值解的“正负开方术”（相当于欧洲 19 世纪的“霍纳算法”）；被称为“招差术”的高次内插算法；这些算法的正确性，有许多要到18世纪以后运用高等数学工具才能加以证明。

中世纪的印度与阿拉伯数学家将初等代数学推进到了相当的高度。“代数学”一词来自阿拉伯语的“阿尔热巴拉”（译成拉丁文是aljabr），是阿拉伯数学家花喇子米（al-Khowarizmi，约780～850)一本代数著作书名的缩称，阿拉伯学者把代数学理解为解方程的学问，这种看法直到19世纪初仍反映着代数学的主线。印度学者也贡献了许多解方程的技巧，他们还特别擅长于解不定方程。不过，印度数学最重要的功绩在于发明“零号”及十进位值制数系的完善（约公元 870 年），印度数码后经阿拉伯人改进成为现在的阿拉伯数字，并在13世纪传到欧洲。

3．欧洲文艺复兴时期

15世纪是欧洲文艺复兴时期，16世纪意大利数学家解出了三次和四次方程，并且第一次引进虚数。后来法国人韦达（Francois Viete，1540～1603）制定了系统的符号代数；荷兰人斯蒂文（Simon Stevin，1548～1620）引进了十进小数；苏格兰学者纳皮尔(John Napier，1550～1617）发明对数而在计算方面作了重大改进。至此，整个初等数学的主要内容基本定型。文艺复兴促成东西方数学的结合，为这门科学在随后世纪里的惊人发展铺平了道路。

三、变量数学的兴起

从17世纪到19世纪初是变量数学时期，变量数学是研究事物及其运动的量的变化及量的关系的变化，由于研究变量而把数与形结合起来，从而产生了解析几何与微积分。

16、17世纪资本主义生产蓬勃发展，对科学技术提出了许多新的要求．机械的使用引起了对机械运动的研究；对外贸易的发展促使航海事业发达，而测定船舶位置的问题要求准确地研究天体运行的规律与编制精确的航海星图和行星运行表；武器的改进刺激了弹道问题的探讨；运河的开凿，堤坝的修筑，行星的椭圆轨道理论等等都向数学提出了新的要求。由于对事物运动与变化的研究成为自然科学的中心问题，初等数学已经不能满足要求，必须推动新的数学工具的产生。

变量数学时期以笛卡儿的解析几何学的建立为起点。1637年笛卡儿的《几何学》一书出版，标志着数学的一个重大转折。《几何学》由 3 部分组成：第一部分是仅用圆规和直尺就能解决的作图问题；第二部分是论曲线的特征；第三部分涉及三次和三次以上的方程的求解问题，笛卡儿解析几何的核心思想是利用代数方程探讨几何作图问题。笛卡儿的解析几何的优点是：首先，在17世纪以前，几何学占统治地位，连代数概念和公式通常也用几何形式表示，而笛卡儿发现代数具有表述简单，推导方便，比几何更具有普遍性等优点，笛卡儿的工作，主要优点在于使两者结合，客观上加强了代数在数学中的地位；其次，笛卡儿用字母表示线段，并通过引进坐标系这一具有普遍意义的方法，用代数方程来描绘几何曲线，解决了一系列复杂的问题；还有笛卡儿进一步提出了“变量”的概念，他用字母表示未知量是一种动态的思想。例如，自由落体运动，设物体下落时间为t，落下的距离为 s，假定开始下落的时刻 $t=0$，那么 s 与 t的相依关系由公式：$s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中g是重力加速度，若自变量 t变化，则因变量 s 也随着变化，

这就包含着变量和函数的概念，笛卡儿把几何曲线看作是动点的轨迹。恩格斯对此作了高度的评价："数学的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辨证法进入了数学❶"。

和笛卡儿同时代的法国数学家费马（Pierre de Fermat，1601～1665），也是解析几何的创始人之一。他在1629年写了《平面和立体的轨迹引论》一书（出版于1679年），就用代数方程来表示曲线的性质。此外，他还给出了一些轨迹的方程，如过原点的直线方程、任意直线方程、圆的方程、椭圆方程、双曲线方程和抛物线方程。费马的这部著作是在死后由其儿子整理出版的，是半个世纪以后才发表的，所以人们往往忽略他在创立解析几何学上的贡献。

解析几何在计算方法上的显著优点，使它被迅速运用到各个科学领域。最初主要用于力学方面，后来又用于短程测地学、航海学、历法计算、天文预测、抛物体的运动等等，近代更进一步把椭圆和抛物线概念应用到电磁学、声学。解析几何的发展，较好地解决了这些问题。还有解析几何为代数的运用铺平了道路，又为后来微积分的产生打下了基础。

微积分的创立，首先是为了解决17世纪力学和天文学问题，它们主要提出以下四类问题。

第一类问题：已知物体移动的距离表为时间的函数的公式，求物体在任意时刻的速度和加速度；或者反过来，已知物体的加速度表为时间的函数，求物体在任意时刻的速度，或已知物体速度表为时间的函数，求物体在任意时刻的移动距离。这类问题对于匀速直线运动来说，常量数学就可以解决，但近代天文学、力学所涉及的天体、落体、抛射体等运动都是非匀速的，在这里常量数学就无能为力了。

第二类问题：已知曲线求曲线的切线。这一问题不仅是几何

---

❶ 《自然辩证法》，人民出版社，1972年版，第236页。

学本身的发展提出来的，也是科学发展需要解决的，光学研究和透镜的设计，都必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律。光线的入射角与光线同曲线的法线有关，法线是垂直于切线的。还有研究运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向，是轨迹的切线方向。

第三类问题：已知函数求函数的最大值和最小值。例如在天文学中要找出行星椭圆轨道的近日点和远日点，在力学中要求抛射体的最大射程和最大高度，都需要进行关于函数最大值和最小值的计算。

第四类问题：求曲线的长度、由曲线围成的面积、曲面组成的体积、物体的重心等。

16～17世纪数学的发展为这些问题的解决，准备了必要的基础，创造了必要条件，从而产生了微积分。

微积分是由英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼茨(Laibniz, Gottfried Wilholm, 1646～1716）各自独立完成的。牛顿微分法的原型是速度的计算。已知运动路程 s 对时间 t 的关系，求任意时刻的速度即瞬时速度，这问题在匀速运动情况下很容易解决，只要计算商数 $\frac{s}{t}$ 即可，这个商数不论 s 与 t 大小如何总是常数。如果是变速运动，那么要计算某一瞬间的速度值，只能用在一段微小的时间 Δt 内通过微小路程 Δs 来度量，并令 Δt 与 Δs 无限缩小，它们的比率便相当于那一瞬间的速度，我们称这一速度为 s 对于 t 的微分系数或微商，并记作 $\frac{dx}{dt}$，把这里的时间 t 与路程 s 推广到任何两个相互依赖的量 x 和 y，就得到确定 y 对 x 的变化率即微商 $\frac{dy}{dx}$ 的一般法则，这就是微分运算。

微分运算的逆运算，即从变化率去求变量本身的方法，叫做积分。在上述变速运动的例子中，已知速度对时间的关系，积分基本上就是求在任意时刻 t 所通过的路程的方法。可以证明，这个

问题和寻求在表示速度与时间关系的曲线L下的面积 S 的问题完全相当。（见图2-2）从 t_1 时刻到 t_2 时刻所通过的路程等于图上速度曲线下，对应于 t_1 和 t_2 的两条线之间的曲边形面积值。积分法最早正是起源于各种几何图形面积的计算。

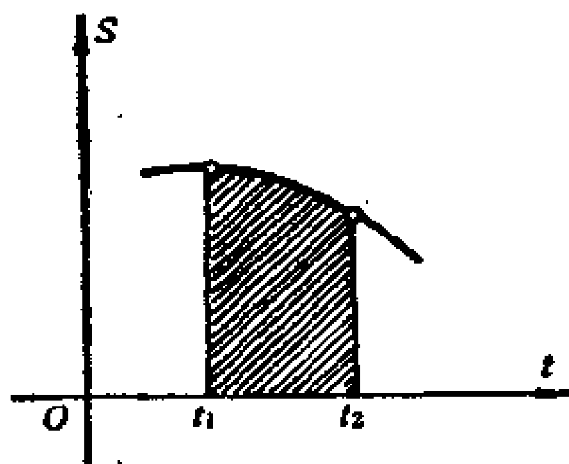


图 2-2

微分和积分的关系。以物体运动的速度与所行路程之间的关系为例，若时间为 t，则当 $\Delta t=t_2-t_1\to 0$时，就是 t 的微分 dt。可见，时间 t 的微分 dt 是对 t 的无限细分，它对 t 来说，趋于消失。路程 s 的微分为 ds，当 dt 是无限小时，ds 亦是无限小。所以路程 s 的微分 ds 也是对 s 的无限细分。所以对某一量的微分，就是对该量的无限细分，也就是把该量"化整为零"，以致对该量来说趋于消失，积分概念则恰恰相反，它是将无限多个微分进行"相加"，也就是"积零为整"。所以微分和积分是恰好相反的运算过程。如果把上面曲边形面积无限细分，分成无穷个长方形，当每个长方形的底边宽度接近于零时，这是微分。然后把这无穷多个长方形面积相加，就最终转化为曲边形的面积了。正如恩格斯曾经写道："如果一杯水的最上面一层分子蒸发了，那末水层的高度 x 就减了 dx 这样一层分子又一层分子地继续蒸发，事实上就是一个连续不断的微分。如果热的水蒸气在同一个容器中由于压力和冷却又凝结为水，而且分子一层又一层地积累起来（在这里，我们必须撇开那些使过程变得不纯粹的附带情况），直到容器满了为止，那末这

里就真正进行了一种积分，这种积分和数学上的积分不同的地方只在于：一种是由人的头脑有意识地完成，另一种是由自然界无意识地完成的"。[1]

19世纪经过柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789～1857）和维尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1815～1897，德国）等人的工作，才给微积分奠定了严格的理论基础。从而兴起了一大批新的数学分支，如级数论、函数论、变分法、微分方程等，构成了一个分支众多的数学分析。它和代数学、几何学组成了基础数学的主体和核心。微积分的建立是数学史上的一件大事，它极大地推动科学技术的发展，牛顿研究天体力学和机械学，利用了微分方程这个工具，法国的勒维耶和英国的亚当斯(J·C·Adams，1819～1892）使用了微分方程，各自独立地计算出了尚未观测到的海王星的位置。现在，人造卫星、自动控制、各种电子装置的设计、弹道计算等都需要应用微积分。所以，微积分成为现代科学技术的强有力的运算工具。

四、现代数学的形成

19世纪初到现在是现代数学时期，现代数学是研究各种变化着的量的相互关系和联系的学科。如果说初等数学是研究常量的一般性质及其相互关系，高等数学是研究变化着的量的一般性质及其相互关系；那么，现代数学不仅在更高的基础上，继续深入地研究各种变化着的量之间的关系，而且研究各种变化着的量之间的可能关系。它所探讨的问题范围之广、等级之深、抽象程度之高、新理论之多，大大超过了初等数学和高等数学，数学已在生产实践、科学实践以及它自身发展的基础上，腾空而起了。

是什么力量推动现代数学以前所未有的速度，向深度和广度发展呢？一是现代化生产实践的需要；二是现代科学技术发展的需要；三是数学本身发展的需要。

---

[1] 《自然辩证法》，人民出版社，1972年版，第247页。

现代工农业生产向机械化、电气化、自动化方向发展。在现代化生产实践过程中，人类认识自然、改造自然的展模和程度，提高到了一个新的水平。人们在研究现代化生产实践中揭示出来的，日益众多的客观事物的数和形的关系时，就不能不对数学科学提出新的要求。此外，现代化的生产实践，还为数学研究提供了新的物质技术条件，电子计算机的发明和制造，对数学发展所起的巨大作用。

19世纪末到20世纪初，由于发生了物理学的革命，自然科学进入了一个新的历史阶段——现代科学。20 世纪 40～50 年代，由于出现原子能、电子计算机和空间技术，开始了影响极其深远的、全面的技术革命——第三次技术革命。现代物理学和现代化技术装备，有力地促进了化学、天文学、地学和生物学的进一步发展。现代科学研究对象日益超出人类的感官范围以外，向高压、高温、高速、高强度、远距离、自动化发展。以长度单位为例，小到1fm(即10^{-15}米)大到 1 亿万光年，这些测量和研究都不能依赖于感官的直接经验，越来越多地要依靠理论计算的指导。各门基础学科的大发展和互相渗透，又产生了大量的边缘学科和综合性学科。现代化科学技术大发展，必然要对数学提出更高的要求。从而使现代数学的研究对象和应用范围大大扩张，不断地揭示了一些原先看来相距很远的领域之间，同样存在着数和形的统一性。

新的数学理论、数学成果的建立与取得，产生于解答前人遗传下来的未能解决的问题，以及当前数学发展提出的新问题。数学问题是数学发展的重要源泉。陈景润(1933～　　在哥德巴赫猜想上取得的重要成果，就是一例。数学工作者为解答前人遗留的问题和当前数学发展提出的新问题。要花费巨大的精力和时间。尽管对其中的一些问题已经获得解决，但也还有一些问题至今仍未得到解答。然而在这个创造性劳动的过程中，他们却创立了不少的新概念、新理论和新方法。这些新的概念、理论和方法，往往比他们企图解答的问题本身更有价值。

从19世纪 20 年代到 70 年代，是现代数学的准备阶段，这个

阶段以非欧几何、群论和分析严格化三大成就为特征。

非欧几何学是在2000余年来证明欧几里得"平行公理"的尝试历尽失败的情况下建立的，在这种新的几何中，原来 意 义 的 平行公理（即过直线外一点只能作一条平行线）不再成立，认为过直线外一点。可以作两条直线与原直线平行；还认为三角形的三内角之和，小于180°等。这叫双曲几何。这种新的几何称为非欧几何，是俄国数学家罗巴切夫斯基(Николай Иванович Побачевский，1792～1856）于1826年创建的。几乎同时由匈牙利数学家J·波尔约（Janos Bolyai，1802～1860）发明高斯（Carl Friedrich Gauss，1777～1855，德国数学家)也独立发明了非欧几何。人们发现罗氏几何与欧氏几何相互间没有矛盾，欧氏几何是日常小范围空间条件下，可将空间视为绝对平直空间的反映，而罗氏几何是天文学上的大尺度宇宙空间、弯曲空间的反映。所以，非欧几何打破几千年来人们认为现实空间只有欧氏绝对平直的空间一种，使人们对空间观念的认识发生了飞跃，发现几何的新原则，扩大了几何研究对象和应用范围。19世纪中叶以后，又产生高维几何学、黎曼几何学、射影几何学等新学科。

群论导源于对五次以上代数方程根式求解的研究，它最先由法国青年数学家伽罗瓦(Evariste Galois，1811～1832）提出。伽罗瓦的群，本来用来刻划代数方程根之间的置换性质的，后被推广为描述各种数学与物理对象的对称性质的普遍工具。群论的出现，标志着代数对象的本质扩张。代数学不再仅仅是研究通常数的运算关系，而更多地是研究象"群"这样定义了抽象的运算的数学结构。伽罗华之后，这类抽象的对象层出不穷，数学家又引进环、域、四元数、李群，还有矩阵、向量、张量。加上布尔代数的建立，使古老的代数学也面目一新。

分析的严格化是为了消除早期微积分的逻辑缺陷而逐步建立的。由于时代限制，牛顿和莱布尼茨的微积分大厦基础是不稳固的，这使他们的理论在整个 18 世纪遭到尖锐的批评。19 世纪 数学家进行分析严格化运动。这一运动由法国数学家柯西、高斯、

阿贝尔(Niels Henrik Abel1802～1829,挪威数学家)等人发起,至德国数学家维尔斯特拉斯和康托尔（Moritz Benedikt Cantor 1829～1920，德国数学家)等集大成。分析基本概念函数、极限、微分、积分、乃至实数本身都获得了精确、普遍的定义。在严格的微积分基础上，复变函数和数学物理繁荣起来，一些较老的数学分支如数论、概率论等也获得了新的生命力，整个现代分析的广阔天地打开了。

19世纪70年代以后,现代数学真正形成了,这个时期的重要特征是集合论开始占据统治地位。集合论是康托尔适应分析严格化需要而建立的。"集合"象数一样是高度抽象而又普遍的概念,用集合论的语言重新描述或解决代数、几何与分析中长期存在的问题,在20世纪初引出了实变函数论、抽象代数、点集拓扑学和泛函分析等现代数学分支，集合论现已渗入几乎所有的数学领域而成为现代数学的通用语言。

集合论也不是天衣无缝，围绕着如何解决集合论中出现的逻辑矛盾即所谓"悖论"问题，在20世纪早期形成了关于数学基础的三大学派——逻辑主义、直觉主义和形式主义。他们之间的激烈争论，促使数学家们对数学基础达到了更深刻、更本质的理解，对数学基础的探讨又推动了另一门学科——以数学推理本身的分析为对象的数理逻辑的进步。

20世纪40年代，随着现代化大生产发展，尖端科学与军事技术的需要，涌现出大量新的应用数学分支，内容的丰富，应用的广泛,名目的繁多,都是史无前例的,如对策论(是用数学方法研究竞争中是否存在制胜对方的最优策略，以及如何找到这些策略等问题)；规划论（研究计划管理工作中有关安排和估值的问题)；排队论（研究公用事业经常出现排队的现象)；最优化方法(研究在工程技术、国防科学、社会科学以及工商业贸易部门中，怎样在给定的条件下，充分利用现有的人力物力，使得完成某一项工作最快最省或质量最好)；还有控制论、信息论、系统论等学科，40年代以后应用数学的分支像雨后春笋一般出现，它在解决了大

量的实际问题中不断发展壮大，尤其是电子计算机的出现，是数学史上的一件大事，过去有些数学上不能解决的问题，现在有了解决的可能，为数学的应用开辟了广阔的前途，推动了数学的发展。数学与其他领域相互渗透又出现许多边缘学科与交叉学科，如生物数学、数学地质学、数学经济学、数理语言学、计量历史学、定量社会学等等，形成一门系统庞大、分支众多的现代数学。就像一棵根深叶茂的大树一样，以粗壮的树干向周围分出了许多枝叉，这就是整个数学王国蓬勃发展的总面貌。

第三章　测度论、勒贝格积分学与实变函数论

17世纪随着科学技术的发展，数学由常量数学进入到变量数学，创建了微积分。它在数学发展中的地位是十分重要的，它是继欧几里得几何学之后，全部数学中的一个最大的创造。但是，微积分的发展经历了漫长而曲折的道路，才成为数学中的一大部门——数学分析，成为现代科学技术发展的强有力的运算工具。

一、牛顿、莱布尼茨的微积分

17世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素。归结起来，大约有四类问题：第一类问题是研究运动的时候直接出现的，也就是要求出瞬时速度的问题；第二类问题是求曲线的切线的问题；第三类问题是求函数的最大值和最小值问题；第四类问题是求曲线长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心，以及一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力等问题。17世纪的许多著名数学家、天文学家对上述问题进行了大量的研究工作，如费马、笛卡儿、刻卜勒等都提出过许多有价值的理论，为微积分的创立作出了贡献。

17世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国的牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在各自的国家里研究和完成了微积分的创立工作。他们各自独立地建立起微积分学的体系。他们的最大功绩是把两个貌似不相关的问题联系起来，一个是求切线问题（微分学的中心问题）；一个是求积问题（积分学的中心问题）。

牛顿研究微积分着重于以运动来考察，牛顿曾写过三篇有关微积分的论文，第一篇为《运用无穷多项方程的分析学》，写于1669年，他在朋友中散发过这本小册子，并于1711年正式出版。

文中牛顿不仅给出了求一个变量对于另一变量的瞬时变化率的普遍方法，而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到，因为面积也正是用无穷小面积的和来表示而获得的。牛顿比他的前驱者前进了一步。前人认为是特殊的例子并且只是模糊预见到的事实，而牛顿看出了它的普遍性。它应用这个方法得到许多曲线的面积。他还给出了一个法则：函数之和的不定积分是各个函数的积分之和。牛顿对微积分的探讨，用了无穷小量的方法，瞬时无限小的量，不可分的量，而他对这些概念和这样做在逻辑上是不清楚的；1671年他写了题为《流数法和无穷级数》的书，于1736年正式出版，书中牛顿引进了他独特的记法和概念。他把他的变量看作是由点、线、面的连续运动所生成的，而不是无限小单元的集合。牛顿把变量叫做“流量”，用x、y表示，其关于时间的变化率叫做“流数”，用$\dot{x}$、$\dot{y}$表示。书中在计算方法和应用方面有很大进展；1676年他写了第三篇题为《求曲边形的面积》的论文，于1704年正式发表，进一步阐明他的基本概念。他试图排除无限小的所有痕迹，并对导数的实质作了更明确的论述。它的重点在于用函数值的变化与自变量之值的变化的比来描述导数。

牛顿关于微积分的论文和著作，都没有立即发表。牛顿第一次公开发表有关微积分的论述，是在1687年出版的《自然哲学之数学原理》一书。在《原理》中，牛顿只是提到了微积分，还没有对微积分进行系统的阐述。

莱布尼茨是德国博学的哲学家和数学家，他研究求曲线切线和求曲边梯形面积的问题，开始独立地建立了一套微积分理论。他注意到求曲线的切线需要确定曲线的纵坐标之差和横坐标之差的比，而求曲边梯形面积则需要确定曲线的纵坐标之和，于是他把微分问题和积分问题联系起来，把两者看作互逆运算。大约在1673～1676年间他写了成百页的笔记，创立了一套关于无限小量的求“差”法和求“和”法，即微分学和积分学。

1684年莱布尼茨发表了《关于求极大和极小以及切线的一种新方法，它对分数或无理数也适用》论文。在这篇论文中，他介

绍了一个量的微分的定义，还介绍了和、积、商、幂、根的微分法则，以及关于切线和极大、极小、拐点等问题的应用例子。1686年他的《潜在的几何与分析——不可分和无限》一书出版，在书中提出了积分的概念，他把积分定义为一个量的所有值的和，或无穷多个无限窄的矩形之和，把重点放在定积分上。莱布尼茨对微积分的另一重大贡献是创造了一套十分方便明晰的符号系统，迄今我们使用的微分、导数、积分等符号都是由他首创的。如他创造了dx、dy表示微分，用$\int f(x)dx$表示积分的符号。这些符号比牛顿使用的$\dot{x}$（相当于dx）、$\dot{y}$（相当于dy）等更为简便。

牛顿和莱布尼茨在创建微积分上的基本功绩是把前人在实际中应用的某一方法加以概括和提升，使之变成适合一般方程的运算方法，并且指出微分和积分的互逆过程。他们的工作标志着微积分的诞生。但只是到了19世纪，经过柯西和维尔斯特拉斯等人的工作，微积分才有了严格的理论基础。从此兴起了一大批新的数学分支，如级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法等，构成了分支众多的分析学。

二、积分学的一次革命——测度论、勒贝格积分

随着数学分析的深入研究，1902年法国数学家勒贝格(Henri Léon Lebesgue，1875～1941）提出测度和勒贝格积分，推广了长度、面积积分等概念，发展了定积分定义，为实变函数论的产生奠定了理论基础。

1. 勒贝格积分的产生

19世纪初，微积分学已经基本上成熟了，已经建立起分支众多的分析学。但是，数学家逐渐发现分析学的基础本身还存在许多问题，比如，什么是函数？这个比较简单而且十分重要的问题，数学界并没有一致的见解，以致长期争论各种各样的解答，并不清楚究竟谁是正确的。又如连续性和连续函数的性质是什么？数学界也没有足够清楚的理解。19世纪初，曾经有人试图证明任何连续函数除个别的点外总是可微的。后来德国数学家外尔斯特拉

斯研究了由级数定义的下列函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$$

（$0<a<1$，b 是一个奇数，而且$ab>1+\frac{3}{2}\pi$），这个级数被收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a^n$所控制，所以是均匀收敛的，并且它的和是 x 的到处连续的函数。但是，外尔斯特拉斯证明了这个函数在任何点上都没有导数。连续函数也有处处不可微的，这个事实使许多数学家大为吃惊。

后来，人们又陆续发现了其他许多函数是连续的，但处处不可微。1875年，法国数学家达布证明，不连续函数也可以求定积分，而且不连续的点可以有无限多个，只要它们包含在长度可以任意小的有限个区间之内就行。这又是一大类怪函数。狄利克雷在研究三角级数时，又举出了在无理点上取值 0 ，在有理点上取值 1 的极端病态函数，它是黎曼意义下不可积分函数的最简单的代表。

这些病态函数的出现，破坏了18世纪古典数学的优美，人们究竟该如何对待它？一种批评意见认为“这是一种变态的不健康的函数”，“它是无秩序和混乱的标志”，“脱离实际的空洞的抽象理论”，其中大数学家庞加莱（Jules-Henri Poincaré 1854～1912 法国数学家）尤其怀疑这种新理论。

这些都促使数学家深入研究，设法处理这些函数，仅仅依靠直观观察和猜测是不行的，必须深入研究各种函数的性质。比如，连续函数必定可积，但是具有什么样性质的不连续函数也可积呢？如果改变积分的定义，可积条件又是什么样的？连续函数不一定可导，那么可导的充分必要条件又是什么样的？等等。对病态函数研究，说明真理并不因为庞加莱权威的反对而变得停滞不前。法国青年数学家勒贝格不声不响地研究各种病态函数，

终于导致了一场积分学的革命！

2．勒贝格积分的内容

勒贝格 1875 年生于法国东北部的博韦，他在那里读中学。1894～1897年进入著名的法国巴黎高等师范学校攻读数学。这时受到波莱尔（Félix-Édouard-Justin-Émile Borel 1871～1956）深刻思想的熏陶。毕业后他回南希，在一所公立中学教书，这时他潜心研究三角级数以及测度和积分。1902年，勒贝格发表《积分，长度与面积》一文，第一次系统地阐述他关于测度和积分的思想。同年，他在巴黎大学理学院通过了博士学位。使勒贝格成名的两本专著是：《论三角级数》（1903年）、《关于积分法和原函数研究的讲义》（1904年）。

积分革命首先从长度概念的扩充入手。众所周知，函数的定积分从分割区间为有限个子区间开始，然后将子区间长度乘以该子区间内某点的函数值并作和。当分割加密，子区间长度趋于0时，积分和的极限就是定积分。法国数学家波莱尔在19世纪就考虑，区间有长度，其他点集是否也可以有长度？直线上的开集可以表示为一列开区间之和，就以这列区间长度之和为该开集的“测度”。开集关于某区间的补集是闭集，于是闭集的测度定义等于区间长减去开集的测度。直线上任意一个点集E，若用开集G包起来，则认为E的测度小于G的测度。这种外包集G可以有很多，它们的测度的下确界叫做E的外测度。同样，用闭集F从内部填E，把所有可以填进去的闭集的测度的上确界叫做E的内测度。一个集合E的内测度和外测度相等，则称为E有测度。这样一来，直线上一列点的测度是0，因为外包的一列区间长之和可以任意小．这只要考虑用长为$\frac{\varepsilon}{a}$，$\frac{\varepsilon}{a^2}$，$\cdots\frac{\varepsilon}{a^n}\cdots$的一列区间去包，而它的长度是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{a^n}=\varepsilon$。由这一结论，立刻可知[0，1]中的有理数全体构成的点集有测度零。

这套思想，即所谓确定面积的内填外包法，本来导源于直观的数方格子的方法。为了推广积分概念，1893年，若尔当(Camille Jordan1838～1922年，法国数学家)在他所写的《分析教程》中，提出了"若尔当容度"的概念并用来讨论积分，1898年法国数学家波莱尔把容度的概念作了改进，并把它叫做测度。波莱尔的学生勒贝格（Henri Lèon Lebesgue，1875～1941，法国数学家）在他发表的《积分、长度、面积》一文中，将这套想法更加一般化，引出了可列可加测度和"勒贝格测度"、"勒贝格积分"的概念。勒贝格还在他的论文《积分和原函数的研究》中，证明了有界函数黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826～1866，德国数学家）可积的充分条件是不连续点构成一个零测度集，这就完全解决了黎曼可积性的问题。勒贝格的测度论，使人耳目一新。接着，勒贝格就定义一种积分，把$f(x)$定义的区间$[a, b]$按$f(x)$的取值情况分为若干个勒贝格可测集，然后同样作积分和，如果积分和有极限就说$f(x)$是勒贝格可积的原来分子区间时的积分如果不收敛，现在用分子可测集的方法就可能会收敛，于是许多按黎曼意义不可积的函数，按勒贝格意义却变得可积。黎曼积分与勒贝格积分的差别可以举例说明如下：设有大量不同价值的钱币，要求计算这些钱币的总值。可以有两种不同的计算方法。固然可以用任意依次累加钱的价值的方法，然而也可以用另外的方法来计算，就是用将钱分堆加的办法，将同样价值的钱币放在一堆，再将每一堆钱币的个数乘上这堆钱币的单价，然后将所得到的这些数值都加起来即可。第一种计算钱币的方法，对应于黎曼的积分过程，而第二种则对应于勒贝格积分过程。勒贝格积分对积分学来说，是一个巨大的突破。

勒贝格积分一出现就用来研究三角级数，很容易地得到了许多重要定理，改进了到那时为止的函数可展为三角级数的充分条件。紧接着导数概念也得到推广，微积分中的牛顿一莱布尼茨公式也得到了相应的新结论，一门微积分的延续学科——实变函数论在勒贝格手中诞生了。

本世纪30年代，勒贝格积分论已成熟，并在概率论、泛函分析等方面获得了广泛的应用。时至今日，连工程师也不得不接触这些病态函数，谈论抽象积分了。

三、实变函数论

实变函数论是在19世纪末20世纪初形成的一个数学分支，它的最基本内容已成为分析学各分支的普遍基础。

以实数作为自变量的函数叫做实变函数，以实变函数作为研究对象的数学分支叫做实变函数论。在微积分学中，主要是以连续性、可微性、黎曼可积性三个方面来讨论函数（包括函数序列的极限函数)。如果说微积分所讨论的函数都是性质"良好"的函数（例如往往假设函数连续或只有有限个间断点),那么，实变函数论是从连续性、可微性、可积性三个方面讨论最一般的函数。它所得到的有关的结论自然也适用于性质"良好"的函数。实变函数论是微积分学的发展和深入。

实变函数论以点集论为基础。什么是点集论？点集论是专门研究点所成的集合的性质的理论。实变函数论是运用点集论来研究分析数学中一些最基本的概念和性质的，比如，点集函数、序列、极限、连续性、可微性、积分等。实变函数论还要研究实变函数的分类问题、结构问题、基本运算规则和各种表达方法问题，以及积分理论、逼近理论等。

实变函数论的积分理论研究各种积分的推广方法和它们的运算规则。

在实变函数论中，函数$f(x)$在某个集合E上定义，如果E本身可测，而且对于任何实数a，集合$E[f(x)>a]$也可测，就说函数$f(x)$是可测函数。可以证明，在闭区间上给出的任意连续函数是可测的。同时有许多不连续的函数，同样也是可测的。

利用勒贝格积分来研究积分问题，永远可以按有界导函数$F'(x)$来恢复它的原函数$F(x)$。

$$F(x)=(L)\int_a^x F'(x)dx+c.$$

式中的（L）表示这个积分是勒贝格积分。

勒贝格积分定义也可以推广到无界函数的情形，这个时候要求积分是绝对收敛的。由于有了具有可列可加性的测度和建立在这种测度基础上的积分，导致了与微积分中函数序列的点点收敛和一致收敛不同的一些新的重要收敛概念的产生，它们是几乎处处收敛、度量收敛（亦称依测度收敛）、积分平均收敛等。度量收敛在概率论中就是依概率收敛，具有特别重要的地位。积分平均收敛在一般分析学科中也是常用的重要收敛。一般正交级数的无条件收敛问题在实变函数论中也有所讨论。后来又推广到积分可以不是绝对收敛的情形。从这些就可以看出，勒贝格积分比起柯西最初给出后来又由黎曼发展的老积分定义广大多了。也可以看出，实变函数论所研究的是更为广泛的函数论。

自从外尔斯特拉斯证明连续函数必定可以表示成一致收敛的多项式级数，即连续函数必定可以用多项式来逼近，在实变函数论的领域里又出现了逼近论的理论。

什么是逼近论呢？如果能把A类函数表示成B类函数（比如多项式）的极限，就说A类函数能以B类函数来逼近。如果已经掌握了B类函数的某些性质，那么往往可以由此推出A类函数的对应性质。逼近论就是研究哪一类函数可以用另一类函数来逼近、逼近的方法、逼近的程度和在逼近中出现的各种现象。

和逼近论密切相关的有正交级数理论，三角级数就是一种正交级数。当a_0，a_1，b_1，a_2，b_2，……是常数的时候，

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots\cdots$$

就叫做三角级数。和逼近论相关的还有一种理论，就是从某一类已知函数出发构造出新的函数类型的理论，这种理论叫做函数构造论。

总之，实变函数论和古典数学分析不同，它是一种比较高深

精细的理论，是数学的一个重要分支。它的应用广泛，它在数学各分支的应用成了现代数学的特征，是某些数学分支的基本工具，而且它的观念和方法以及对各数学分支的应用，对现代数学的重要组成部分的一般拓扑学和泛函分析有着极其重要的影响。

四、傅里叶分析和调和分析

傅里叶分析又称调和分析，它是19世纪以后逐渐形成的数学分析中的一个重要分支，主要研究函数的傅里叶变换及其性质。在经历了近两个世纪的发展之后，研究领域已从直线群、圆周群扩展到一般抽象群。关于后者的研究又称为群众的傅里叶分析，以区别于前者的经典傅里叶分析。傅里叶分析作为数学的一个分支 无论在概念或方法上都广泛地影响着数学其他分支的发展，数学中很多重要思想的形成，都与傅里叶分析的发展过程密切相关。

傅里叶生于法国奥塞尔，1795年在巴黎综合工科学校任讲师，由于当时工业上处理金属的需要，他从事热流动的研究工作。1882年他发表题为《热的解析理论》论文，成为数学史上一部经典性的文献。在文中，他发展了热流动方程，并且指出如何求解；在求解过程中，他提出了"任意"周期函数都可以用三角级数来表示的想法，论文基本上包括了他的数学思想和数学成就，以系统地运用三角级数和三角积分而著称，被称为傅里叶级数和傅里叶积分。他的这种数学思想，虽然缺乏严格的论证，但对近代数学以及物理、工程技术都产生了深远的影响，成为傅里叶分析的起源。他的数学思想是：

对任意给定的周期函数 $f(x)$将由三角函数系（$\cos nx, \sin nx$）（$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$）组成的无穷级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

与之对应，其中 a_n 和 b_n 是如下确定的常数：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

傅里叶在文中提出了:"任意"函数(实际上要满足一定的条件，例如分段单调)都可以展开成三角级数，他列举大量函数并运用图形来说明函数的这种级数表示的普遍性。虽然，数学家欧拉和贝尔努竟也曾研究过这个问题，但是，当傅里叶提出研究成果时，却使人感到如此新颖和惊人。傅里叶级数很快成为在具有已知边界条件的偏微分方程理论中的重要运算工具。但是，当傅里叶提出函数可用三角级数来表示时，他的想法还没有给出明确的条件和严格的数学论证，实际的情形人们弄不清楚。这个工作，在傅里叶级数的特殊情形下，由数学家狄利克雷和黎曼担负起来。后来数学家狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet，1805～1859，德国数学家)在历史上第一个给出了函数$f(x)$的傅里叶级数收敛于它自身的充分条件。他证明了在一个周期上分段单调的周期函数f的傅里叶级数就收敛到f自身。黎曼对傅里叶级数的研究也作出了贡献，黎曼于1854年发表题为"用三角级数来表示函数"的论文中，为了使得更广一类函数可以用傅里叶级数来表示，他第一次明确地引进并研究了现在称之为黎曼积分的概念及其性质，使得积分这个分析学中的重要概念，有了坚实的理论基础。他证明了如果周期函数$f(x)$在$[0,\ 2\pi]$上有界且可积，则当n趋于无穷时f的傅里叶系数趋于0。此外，黎曼还指出，有界可积函数f的傅里叶级数在一点处的收敛性，仅仅依赖于$f(x)$在该点近旁的性质。这个非常基本而重要的结果称之为局部性原理。20世纪勒贝格用他的积分理论，把黎曼的工作又推进一步。例如，根据勒贝格积分的性质，任何勒贝格可积函数的傅里叶级数，不论收敛与否，都可以逐项积分。这个结果使傅里叶分析发展得更完善。

傅里叶的创造性工作为偏微分方程的边值问题提供了基本的求解方法——傅里叶级数法，从而极大地推动了微分方程理论的

发展，特别是数学物理等应用数学的发展；其次，傅里叶级数拓广了函数概念，从而极大地推动了函数论的研究，其影响还扩及纯数学的其他领域。

傅里叶深信数学是解决实际问题的最卓越的工具，并且认为"对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉"。这一见解已成为数学史上强调通过实际应用发展数学的一种代表性的观点。

第四章　微分方程和数学物理

微分方程是常微分方程与偏微分方程的总称。它是数学的重要分支之一，它几乎和微积分同时产生，并随着实际需要而不断地发展。

一、微分方程

1．微分方程的来源

微分方程的研究来源极广，历史久远。当人们研究力学、物理学等科学技术时，常常出现一些问题，比如，物质在一定条件下运动变化，要寻求它的运动、变化的规律；某个物体在重力作用下自由下落，要寻求下落距离随时间变化的规律；火箭在发动机推动下在空间飞行，要寻求它飞行的轨道（在空间中的一条曲线），等等。

物质运动和它的变化规律在数学上是用函数关系来描述的，因此，这类问题就是要去寻求满足某些条件的一个或者几个未知的函数。也就是说，凡是这类问题都不是简单地去求一个或者几个固定不变的数值，而是要求一个或者几个未知的函数。

解这类问题的基本思想是要把所研究的问题中已知函数和未知函数之间的关系找出来，从列出包含未知函数一个或者几个方程中去求得未知函数的表达式。但是无论在方程的形式、求解的具体方法、求出解的性质等方面，都和初等数学中的解方程有许多不同的地方。

2．微分方程的内容

微分方程的基本问题是：在一定条件下，确定由微分方程所描述的运动状态或者所给微分方程解出的未知函数，也就是通常所说的定解问题。所求的未知函数叫做方程的解。此外，附加

方程的对解的限制条件就叫做定解条件（包括初始条件和边界条件等）。

微分方程不只有一个解而是有无限多个解，即是有无限多个函数满足这个方程。每一个微分方程确定一整族的满足它的函数，微分方程理论使得有可能充分全面的表达出满足方程的所有函数的性质，这在自然科学的应用上是特别重要的。

在数学上，解这类方程，就要用到微分和导数的知识，因此，凡是表示未知函数和未知函数的导数以及自变量之间的关系方程，叫做微分方程。

3．微分方程的史略

早在牛顿、莱布尼茨创立微积分的时候，他们已经接触到微分方程了。牛顿对天体力学中"三体问题"的研究，即太阳、地球和月亮在引力作用下的相对运动等，但是"三体问题"的积分却长期得不到解决，初等数学不够用了。这样就导致了他对二阶微分方程组的接触。微分方程的名称最早是由莱布尼茨提出的，莱布尼茨曾尝试用现在的"求积分方法"来解某些类型的一阶微分方程。

促使微分方程迅速发展的，是17世纪所涌现出来的实现问题。弹性问题是其中的一类。弹性问题最早是在建筑中考虑房梁在外加荷载下所成形状而提出的。这类问题反映在数学上其形式是：是链线方程，振动弦的方程，两端固定的弹性振动弦方程等。另外，对天体运动的研究也引出了微分方程的问题。莱布尼茨与瑞士数学家伯努利兄弟在常微分方程方面已经有了不少成就。1691年莱布尼兹想了解常微分方程的变量分离法，1694年雅各布第一·伯努利（Jacob Bernoulli 1654～1705，瑞士数学家）作了完整的阐明。

18世纪，欧拉（Léonhard Euler，1707～1783，瑞士数学家）给出了有关全微分方程的一系列理论，其中包括全微分方程的概念、判别条件、通过微分因子将一个非全微分方程化为全微分方程的方法。欧拉还创造了用特征方程来解常系数线性齐次微分方程的方法，并阐明了其通解的形式。后来又经过达朗贝尔(Jean

Le Rond d'Alembert，1717～1783，法国数学家）与拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange，1736～1813，法国数学家)的努力与改进。欧拉还是微分方程近似解法的创始人。拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace 1749～1827，法国数学家）对微分方程组的研究，也是一项重大贡献。

19世纪，是微分方程严格理论的奠定时期。18世纪以后不断出现的特殊的微分方程的求解问题，由积分可解出的微分方程的数目是极为有限的，使数学家逐渐招架不住了。于是他们转向对解的存在性问题的思考，即给定一个微分方程。它在给定的初始条件和边界条件下是否有解？这个问题的解决直接影响着微分方程基础理论的建立。柯西对微分方程解的存在性的处理为常微分方程解析理论的建立奠定了基础。19世纪末法国数学家庞加莱对微分方程开创了宽广的道路，他是以两个方向入手的：一是扩充微分方程解的范围，只要满足微分方程，都加以考虑，这就使微分方程的可解范围大大扩充。这样，微分方程与函数论建立密切的联系，产生了微分方程解析理论。二是在不引进新函数的情况下，研究微分方程的定性理论。1881～1886年庞加莱连续发表了《由微分方程所确定的积分曲线》等四篇论文，标志着微分方程定性理论的完成。他的论文表达了一种新颖的认识和提法，即把微分方程的解看作是由微分方程本身所定义的积分曲线族。这样，就引导出一条新的思路。和过去不同，不是着眼于先求出方程的解，再研究解的性质，而是在不求出解的情况下，通过直接考虑微分方程的系数和方程本身的结构去研究它的解的性质：也就是着力从微分方程本身去分析和推断积分曲线可能具有的各种特性，如曲线的形状、结构、特点和趋势等。这样一种新的思路，为微分方程开拓出一条新的领域——常微分方程的定性理论。而庞加莱的这四篇论文为定性理论作了奠基性的工作。

微分方程的理论逐步完善的时候，利用它就可以精确地表述事物变化所遵循的基本规律，只要列出相应的微分方程，有了解方程的方法，就可以把这种或那种运动该如何处理提供了办法。

微分方程也就成了最有生命力的数学分支之一。

二、常微分方程

如果在一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，那么这个方程就叫常微分方程。也可以简单地叫做微分方程。

1. 常微分方程的原理

常微分方程的基本理论主要是研究解的存在性和唯一性，解的定性理论和稳定性理论。

常微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y' \cdots\cdots, y^{(n)}) = 0。$$

在这个方程中，x是自变量，y是x的未知函数：$y=y(x)$，而y'，……，$y^{(n)}$依次是函数$y=y(x)$对x的一阶、……、n阶导数。在方程中出现的各阶导数中最高的阶数叫做微分方程的阶。比如微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y \qquad \text{是二阶的，}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \qquad \text{是一阶的。}$$

关于常微分方程的一些基本概念，这里举例加以说明，比如：求在点x处的切线斜率都等于已知函数$2x$的函数。

假设未知函数是$y=f(x)$，在点x处的切线的斜率是$\frac{dy}{dx}$，于是$y=f(x)$所应满足的微分方程是

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

因为它含有一阶的导数$\frac{dy}{dx}$。所以这个方程就是一阶微分方程。

我们由

$$dy = 2xdx,$$

两端积分变成

$$\int dy=\int 2xdx,$$

$$y=x^2+c$$

就是所要求的函数。其中 c 是任意常数，它起着参数作用。函数

$$y=x^2+c$$

表示这个一阶微分方程的通解，它的几何意义是单参数的曲线族（见图4-1）。

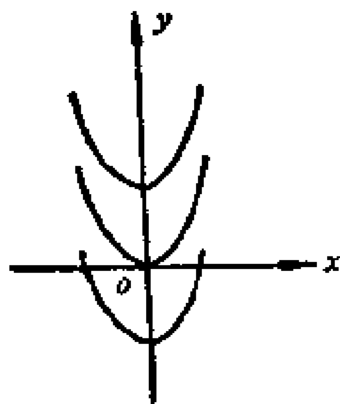


图 4-1

曲线族中任意一条曲线是这个微分方程的积分曲线，因为它在点 x 处的切线斜率都等于已知函数$2x$，可见它的解不只是一个或几个，而是有无穷多个。如果所求未知函数过平面上一定点（x_0，y_0），那么只能确定一个解，就是在一切积分曲线中选择一条曲线。比如，可由

$$y=\int_{x_0}^{x}2x\mathrm{d}x+y_0$$

解出，也就是

$$y=x^2+(y_0-x_0^2)。$$

或者由曲线

$$y=x^2+c$$

过定点（x_0，y_0），应该有

$$y_0=x_0^2+c,$$

所以
$$c=y_0-x_0^2。$$

这样也得到这个方程的一个解，

$$y=x^2+(y_0-x_0^2)。$$

这个例子已经使我们初步认识到常微分方程的形式，它是含有自变量 x，未知函数 y 和它的导数的一个关系式，它的解法和微积分学有密切的联系，解的性质是表示无穷多个一元函数或一个一元函数。

现在再举一个自由落体问题来介绍常微分方程。

假设质量是 m的物体只受重力的作用而自由降落，求它的运动方程。

怎样求它的自由降落的方程呢？我们可以把物体降落的铅垂直线作为 s 轴，方向向下，也就是向着地心的方向，如图 4-2 表示的那样。我们可以假设物体在时刻 t 的位置是 $s=s(t)$，由二阶导数的力学意义，可以知道 $\frac{d^2s}{dx^2}$是物体沿OS轴方向的加速度。由物理学又知道重力的作用下物体加速度的方向是向下的，它的大小是 g，于是对于质量是 m 的物体，在运动的任何时间内，应该满足等式

图 4-2

$$m\frac{d^2s}{dx^2}=mg$$

可以看出，等式中含有未知函数 $s(t)$ 的二阶导数，这就是二阶微分方程，是描述质点按它的自由下落过程的函数 $s(t)$ 所应该满足的微分方程，从而把决定质点运动的力学问题转化成微分方程求解的数学问题。

解这个方程可以用积分的方程。

$$\int d^2s=\int g dt^2,$$

就是 $$ds=(gt+c_1)dt,$$

再积分一次 $$\int ds=\int(gt+c_1)gt,$$

也就是 $$s=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2.$$

这就是我们熟悉的自由落体公式，其中 c_1、c_2 是两个任意常数，也就是说，这是通解，表示自由落体的运动方程是通解形状。

如果开始的时候，时间$t=0$，这个时候物体的位置就在 $s_0=s(0)$，它的速度

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0$$

那么， $c_1=V_0$， $c_2=s_0$。

于是自由落体的运动方程是：

$$s=\frac{1}{2}gt^2+V_0t+s_0。$$

从上面两个例子可以看到常微分方程的一些内容及其性质。比如，一阶微分方程的解含有 1 个任意常数，二阶微分方程的解含有 2 个任意常数。一般地说，n 阶微分方程的解中含有 n 个任意常数。也就是说，微分方程的解中含有任意常数的个数和方程的阶数相同。这种解就叫做微分方程的通解。通解构成一个函数族。

如果根据实际问题要求出其中满足某种指定条件（叫做初始条件）的解来，那么求这种解的问题叫做定解问题，对于一个常微分方程的满足定解条件的解叫做特解。如$S=\frac{1}{2}gt^2+V_0t+s_0$，就是个求特解问题。

3．常微分方程的特点

第一，求通解

求通解在历史上曾作为微分方程的主要目标，我们从上面所讲的内容也可以看到，一当求出通解的表达式，就容易从中得到问题所需要的特解。也可以由通解的表达式，了解对某些参数的依赖情况，便于参数取值适宜，使它对应的解具有所需要的性能，还可以有助于进行关于解的其他研究。

后来的发展表明，能够求出通解的情形并不多，在实际应用上所需要的倒是要求满足某种指定条件的特解。当然，通解是有利于研究解的属性的，但是人们已把研究重点转移到特解问题上来。

第二，一个微分方程是不是有特解呢？如果有，又有几个

呢？这是微分方程论中一个最基本的问题，数学家把它归纳成基本定理，叫做存在和唯一性定理。因为如果没有解，而我们要去求解，那是没有意义的；如果有解而又不是唯一的，那又不好确定。因此，存在和唯一性定理对于微分方程的求解是十分重要的。微分方程中有很大部分方程求不出十分精确的解，而只能得到近似解。当然，这个近似解的精确程度是比较高的。另外还应该指出，用来描述物理过程的微分方程以及由实验测定的初始条件也是近似的。这种近似之间的影响和变化，还必须在理论上加以解决。

第三，微分方程不限制初等函数的范围，针对所研究的方程引入新的函数，这样就使得微分方程能够包含比较多的特殊函微，同时也扩展了微分方程的可能领域，促使微分方程和函数论，特别是和复变函数论紧密结合。

第四，微分方程还从几何方面来考虑方程的解。也就是说，微分方程的一个解对应着平面上的一条曲线，叫做这个方程的积分曲线。比如，曲线$y=x^{\frac{2}{3}}$就是微分方程

$$3y^2dy-2xdx=0$$

的一条积分曲线。研究这些曲线的一般性质、曲线的奇点、极限环和一般分布等等属于定性理论。

现在，微分方程在很多学科领域内起着重要的作用，刚体力学的基本方程就是一个微分方程组，流体力学的基本方程是微分方程，弹性力学的方程是高阶方程。20世纪以来，随着大量的边缘学科诸如电磁流体力学、化学流体力学、动力气象学、海洋动力学、地下水动力学等等的产生和发展，也出现不少新型的微分方程（特别是方程组）。70年代随着数学向化学和生物学的渗透，出现了大量的反应扩散方程。还有自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究，等等。这些问题都可以化为求微分方程

的解，或者化为研究解的性质。应该说，应用微分方程理论已经取得了很大的成就，但是，它的现有理论也还远远不能满足需要，还有待进一步的发展，使这门科学的理论更加完善。

三、偏微分方程

如果在一个微分方程中出现有多元函数的偏导数；或者说如果未知函数和几个变量有关，而且方程中出现未知函数对几个变量的导数那么这种微分方程叫做偏微分方程。

1．偏微分方程的产生

在科学技术迅速发展中，人们研究的许多问题用1个变量的函数来描述已经显得不够了，不少问题要用多个变量的函数来描述。比如，从物理角度来说，物理量有不同的性质，温度、密度等是用数值来描述的叫做纯量；速度、电场的引力等，不仅在数值上有所不同，而且还具有方向，这些量叫做向量；物体在一点的应力状态的描述出的量叫做张量，等等。这些量不仅和时间 t 有关系，而且和空间坐标x、y、z也有联系，这就要用多个变量的函数来表示。

应该指出，对于所有可能的物理现象用某些多个变量的函数来表示，只能是理想化的。如介质的密度，实际上"在一点"的密度是不存在的，而我们把在一点的密度看作是物质的质量和体积的比，当体积无限缩小的时候的极限，这就是理想化的。介质的温度也是一个极抽象而且理想化了的概念。这样就产生了研究某些物理现象的理想了的多个变量的函数方程，这种方程就是偏微分方程。

偏微分方程这门学科产生于18世纪，欧拉在他的著作中最早提出了弦振动的二阶方程。随后不久，法国数学家达朗贝尔（Jean le Rondd'Alembert，1717～1783）也在他的著作《论动力学》中提出了特殊的偏微分方程。这些著作当时没有引起多大注意。1746年，达朗贝尔在他的论文"张紧的弦振动时形成的曲线的研究"中，提议证明无穷多种和正弦曲线不同的曲线是振动的

模式。这样就由对弦振动的研究开创了偏微分方程这门学科。

后来，和欧拉同时代的瑞士数学家丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli，1700～1782年）也研究了数学物理方面的问题，提出了解弹性系统振动问题的一般方法，对偏微分方程的发展起了比较大的影响。拉格朗日也讨论了一阶偏微分方程，丰富了这门学科的内容。

偏微分方程得到迅速发展是在19世纪，那时候，数学物理问题的研究繁荣起来，许多数学家都对数学物理问题的解决作出了贡献，这里应该提一下法国数学家傅里叶。他在从事热力学的研究中，写出了《热的解析理论》。他提出三维空间的热方程，也就是一种偏微分方程。他的研究对偏微分方程的发展的影响是很大的。

2．偏微分方程的内容

偏微分方程也叫做数学物理方程。原因是这种方程特别适用于解决许多物理学方面的问题；也是指在解决物理学、力学等的问题中得到的。

具有 2 个自变量的二阶偏微分方程的一般形式可以有方程

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$$ 给出。

式中 x 和 y 是自变量；$u=u(x, y)$ 是一个函数；$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，

$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$，$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 y}$，$u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，这些都是 u 的导数；这个方程含有 8 个变量，$F(x, y, u, p, g, r, s, t,)$ 就是 8 个变量的已知函数。∂ 是偏微分的符号。

举例来说，$u_{xy}=0$ 是一个二阶偏微分方程。很容易进行检验，对于任意选定的函数 h 和 g，$u=h(x)+g(y)$ 就是这个方程的解。

偏微分方程的解一般有无穷多个，但是在解决具体的物理问题的时候，必须从中选取所需要的解。因此，还必须知道附加条

件。因为偏微分方程是同一类现象的共同规律的表示式，仅仅知道这种共同规律还不足以掌握和了解具体问题的特殊性，所以就物理现象来说，各个具体问题的特殊性就在于研究对象所处的特定条件，就是初始条件和边界条件。

例如，弦振动问题，对于同样的弦的弦乐器，如果一种是以薄片拨动弦，另一种是以弓在弦上拉动，那么它们发出的声音是不同的。原因就是由于在"拨动"或"拉动"的那个"初始"时刻的振动情况不同，因此产生后来的振动情况也就不同。

就弦振动来说，弦振动方程只表示弦的内点的力学规律，对弦的端点就不成立。所以在弦的两端必须给出边界条件，也就是考虑研究对象所处的边界上的物理状况。边界条件也叫做边值问题。

天文学中也有类似情况，如果要通过计算预言天体的运动，当然必须知道这些天体的质量，同时除了牛顿定律的一般公式以外，还必须知道我们所研究的天体系统的初始状态，就是在某个起初时间，这些天体的分布以及它们的速度。总而言之，在解决任何数学物理的问题的时候，总会有类似的附加条件。

在数学上，初始条件和边界条件叫做定解条件。偏数分方程本身是表达同一类物理现象的共性，是作为解决问题的依据；定解条件却反映出具体问题的个性，它提出了问题的具体情况。方程和定解条件合在一起，就叫做定解问题。求偏微分方程的定解问题可以先求出它的通解，然后自用定解条件确定出函数。

偏微分方程理论的主要内容包括：双曲型偏微分方程、抛物型偏微分方程、椭圆型偏微分方程。许多物理问题的分析导致二阶线性偏微分方程，如果这种方程存在2个自变量的情形，这种类型的最一般方程是下面这种形式：

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g.$$

式中的系数 a，b，……，f，g 是 x 和 y 的已给函数。现在假设 $a^2+b^2+c^2\neq0$，那么，如果 $b^2-ac>0$，就说这个方程是双曲型偏微分方程；如果 $b^2-ac=0$，就说这个方程是抛物型偏微分方

程；如果$b^2-ac<0$，就说这个方程是椭圆型偏微分方程。一般说来，描述声波、光波、电磁波的传播和弦振动、弹性体的振动等现象的微分方程，都是双曲型偏微分方程；描述热的传导、带粘性的流体运动等的微分方程，都属于抛物型偏微分方程；凡是1个物理现象，经历长时间以后渐趋稳定的，通常可用椭圆型偏微分方程来描述，比如牛顿万有引力定律的研究和理想流体的流动，都是相当经典的椭圆型偏微分方程问题。

随着力学、物理学的发展，连续介质力学、电磁理论、量子力学、引力理论、规范场等等方面的基本规律，都被写成偏微分方程的形式。这些方程通常称为数学物理方程，对于相应的力学、物理学都是至关重要的。在偏微分方程中所获得的每一研究成果，几乎都可以迅速地在力学、物理学中得到应用。近年来，在力学、物理学、化学、生物学以至经济学、社会学等学科中又不断归结出一些新的偏微分方程（组），它们的研究对于了解相应学科中的一些运动规律是十分重要的。偏微分方程还是处理分析问题和几何问题的有效工具。例如复变函数论，特别是多元复变函数需要用偏微分方程去解决许多问题。微分几何所提出的问题，推动了偏微分方程的发展，微分几何和偏微分方程相互渗透，成为一个重要的发展趋势。

关于偏微分方程求解概念的进展（即广义解的引入）。自从牛顿—莱伯尼茨创立的微积分学，已有300多年的历史。有了微积分，就有了微分方程，人们用200多年的时间，在古典解的意义下去寻找微分方程的解，即解在古典导数的意义下满足微分方程。只是到了本世纪20年代，人们才开始在变分形式中或在等价的形式中，即在一定函数类中用求泛函报小值的方法去求解。从求古典解到求变分形式（广义）解的飞跃和转化，使现代数学方法和函数空间理论，泛函分析，变分方法和拓扑方法变成了新的求解工具。

四、数学物理

数学物理是研究物理问题中的数学理论和数学方法。它探讨物理现象的数学模型，即寻求物理现象的数学描述，并对模型已确立的物理问题研究其数学解法，然后根据解答来诠释和预见物理现象，或者根据物理事实来修正原有模型。

物理学和数学关系密切，牛顿力学中，质点和刚体的运动用常微分方程来刻画，求解这些方程是牛顿力学中的重要数学问题。18世纪，牛顿力学的奠基开始由变分原理所刻画，这又促进了变分法的发展。18世纪以来，在连续介质力学、热力学和电磁理论中，归结出许多偏微分方程，通称数学物理方程。直到20世纪初期，数学物理方程的研究才成为数学物理的主要内容。此后，联系于等离子体物理、固体物理、非线性光学、空间技术、核技术、低温超导等方面的需要，又有许多新的偏微分方程问题出现。例如孤立子波、间断解、分歧解等。它们使数学物理方程的内容进一步丰富起来。

从20世纪开始，由于物理学内容的更新，数学物理有了新的发展。伴随着对电磁理论和引力场的深入研究，人们的时空观念发生了根本的变化，这使得闵科夫斯基空间和黎曼空间的几何学成为爱因斯坦狭义相对论和广义相对论所必需的数学理论，许多物理量以向量、张量和旋量作为表达形式。在探讨大范围时空结构时，还需要整体微分几何。在量子场论中波函又被二次量子化成为算子，在电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用中描述粒子的产生和消灭。因此，必须研究各种函数空间的算子谱、函数的谱分析和由算子所形成的代数。

物理对象中揭示出的多种多样的对称性，使得群论显得非常有用。晶体的结构就是由欧几里得空间运动群的若干子群给出。正交群和洛伦茨群的各种表示对讨论具有时空对称性的许多物理问题有很重要的作用。基本粒子之间，也有种种对称性，可以按群论明确它们的某些关系。

微观的物理对象往往有随机性。在经典的统计物理中需要对各种随机过程的统计规律有深入的研究。

随着电子计算机的发展，数学物理中的许多问题可以通过数值计算来解决，由此发展起来的“计算力学”、“计算物理”都发挥着越来越大的作用。计算和直接摸拟物理模型也成为重要的方法。

科学的发展表明，数学物理的内容将越来越丰富，解决物理问题的能力也越来越强。

第五章　数　论

人们在研究整数特性的过程中，发现数和数之间有各种不同的关系，比如，有些整数可以被另一些整数整除；有些数除了1以外没有任何约数，等等。研究整数之间的相互关系，找出它们的规律，就逐步发展成一门独立的学科。最早是从研究整数开始的，所以叫做整数论。后来整数论又进一步发展，数学上就叫作数论。数论与几何学一样，既是最古老的数学分支，又是始终活跃的数学领域。

一、数论的形成与发展简况

自古以来，数学家对于整数性质的研究一直十分重视，但是直到19世纪，这些研究的成果只是孤立地记载在各个时代的算术著作中，也就是说，这一系列理论还没有形成完整统一的学科。

数的概念的形成和发展经过了漫长的历史阶段。最初是自然数，也就是正整数，后来出现了分数、零和负数；由于实践的需要，为了解决度量连续量的问题，在数的计算中又引入了无理数；为了解决开方可以实施的问题，引进了虚数，这样又出现了复数的概念。

整数是最简单明显的数学概念，它和客观实际紧密相联。从1、2、3、……这些正整数本身看来，它们是十分简单的，但是它们又都具有一定的特性。比如，可以把它们用各种方法进行分类，把它们分成奇数（1、3、5……）和偶数（2、4、6、……），素数和合数。所谓素数，也叫做质数，就是指除了1和本身以外不能被其他正整数整除的一切大于1的正整数，如2、3、5、7、11、……等；所谓合数，是指不是1，也不是素数的正整数，比

如4、6、8、9、10、……等；当整数a能被整数b所整除的时候，a叫做b的倍数，b叫做a的约数，如6是3的倍数，3是6的约数。正整数的数和数之间有一定的排列次序，相互之间有一定的关系，从上面列举的正整数的类别还可以看出，正整数具有自己的特性。

在我国古代，许多著名的数学著作中都有关于数论内容的论述，比如，求"等数"（最大公约数）、勾股数组、某些不定方程整数解的问题等等。但是，这些内容的记载都是比较零散的。

在国外，古希腊时代的数学家对于数论中一个最基本问题——整除性问题就系统地研究过，欧几里得的《几何原本》第七、八、九篇中，记述了这些内容。刻画自然数的基本规律，为欧几里得所证明，即如果不考虑排列次序，则每个合数都可以唯一地表成素数的乘积。这又称为算术基本定律。素数分布是数论最早研究的课题之一，欧几里得证明过素数有无穷多。他还给出求两个自然数的最大公约数的算法，即所谓欧几里得算法。在那个时代，关于质数、合数、约数、倍数等一系列概念就已经被提出来应用了。后来，各个时代的数学家对整数性质的研究作出过重大的贡献，使数论的基本理论逐步得到完善。

在整数性质的研究中，人们发现质数是构成正整数的基本"材料"，要深入研究整数的性质就必须研究质数的性质。因此，关于质数性质的有关问题，一直受到数学家的注意。

首先，质数是有限个还是无限个呢？在《几何原本》中有"质数有无限多个"的记载，并且给出了巧妙的证明。证明的大意是这样的：

假设只有有限个质数（比如，质数是n个），它们分别是P_1、P_2、P_3、……P_n，那么

$$P=P_1P_2P_3\cdots P_n+1$$

是大于1的整数。并且P不能被P_1、P_2、P_3、……，P_n中的任一个整除，因此，P或者是一个不同于P_1、P_2、P_3、……、P_n的质数，或者是一个能被P_1、P_2、P_3、……、P_n以外的质数所整除的

数。上述两种情况，无论是哪一种都和假设只有n个质数相矛盾。这样就会得出结论，质数不是有限个，而应该是有无限多个。

其次，由于质数有无限多个，那么，怎样在自然数中把质数寻找出来呢？一般说来，我们只能找出不大于某个自然数N的所有质数。公元前3世纪，希腊数学家埃拉托色尼（前275～前194年）发明的"筛法"，原则上解决了这个问题。比如，我们用这种"筛法"求不超过30的所有质数，只要把1到30这个数顺序写出，划去单位1，保留2但是划去其余的偶数，保留3但是划去其余的3倍数，保留5但是划去其余的5的倍数，最后剩下的就是不超过30的所有质数。这些质数是2、3、5、7、11、13、17、19、23、29，共有10个。用这个方法原则上可以造出不超过N（N是大于1的整数）的质数表。

18世纪末，关于整数性质的零散知识已经十分丰富，把它们整理加工成为一门系统的学科的条件已经完全成熟了。高斯总结前人的研究成果，写了《算术探讨》一书，于1800年寄给了法国科学院，但是法国科学院拒绝了高斯这部杰出的著作，高斯只好在1801年自己发表了这部著作。这部书开始了现代数论的新纪元。到目前为止，数论方面的有关课题的工作方向，也是从《算术探讨》开始确定的。

在《算术探讨》这部书中，高斯把过去研究整数性质所用的符号标准化了，把现存的定理系统化并进行了推广，把要研究的问题和已知方法进行了分类，还引进了新的方法。

二、数论的基本内容

按照方法来分，数论可以分成初等数论、解析数论、代数数论、几何数论和超越数论。

1．初等数论

初等数论是不借助于其他数学分支的知识，而只依靠算术方法为主要的研究方法，来研究整数性质，而区别于数论的其他分支。上面所说的整除性和素因子分解问题，就是一个例子，而古

希腊哲学家丢番图（Diophantus）研究的不定方程的求解问题，则又是另一个例子。

例如，假设两个数的每一个都可以表示成两个数的平方的和，那么，它的乘积同样也可以表示成两个数的平方的和。比如，$13=3^2+2^2$，$5=2^2+1^2$，那么$13\times5=65=8^2+1^2$。这个性质的证明是利用欧拉恒等式，也就是利用简单代数知识就可以证明了。欧拉的恒等式是：

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\end{aligned}$$

数论中还引入了同余的概念。什么叫作同余呢？给定一个正整数 m，把它叫做模，如果用 m 去除两个整数 a 和 b 所得的余数相同，我们说 a、b 对模 m 同余，记作

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m),$$

如果余数不同，我们就说 a、b 对模 m 不同余，记作

$$a\not\equiv b(\mathrm{mod}\,m)。$$

比如，101和5这两个数被3除，余数相同都是2，就可以记成$101\equiv5\ (\mathrm{mod}\,3)$，这个式子读作101和5对模3同余。

有了同余的概念，就可以用一个正整数 m 作标准，把所有的整数分成 m 个类，也就是被 m 除余0的归一类，余1的归一类，……余 $m-1$ 的归作一类。同余虽然是新的概念，但是就研究方法来说，并没有借助其他数学分支的帮助，因此，同余式论构成了初等数论的一个重要内容。

同余式论在我国古代早就获得了突出的成果。《孙子算经》这本古代数学著作中有一个问题被后人叫做《孙子问题》，宋代数学家秦九韶给出了《孙子问题》的一般解法，现在世界公认的秦九韶的方法叫做《中国剩余定理》或叫做《孙子定理》，它是我国对数论作出的杰出贡献。例如《孙子算经》中有一题叫"物不知数，内容是：现在有一些物品，不知道它的数目，3个3个地数剩下2个，5个5个地数剩下3个，7个7个地数剩下2个，问这些物品共

有多少？这个问题用同余式理论的现代符号来表示，它的解法就是：

设x是要求出的物品数，那么 $x\equiv2(\bmod 3)$，$x\equiv3(\bmod 5)$，$x\equiv2(\bmod 7)$，解这个同余式组，求得

$x\equiv23(\bmod 105)$

所以这个题的最小正整数解是23。一般地解 $x\equiv a(\bmod 3)$，$x\equiv b(\bmod 5)$，$x\equiv c(\bmod 7)$，可得

$x\equiv70a+21b+15c(\bmod 105)$。

这个解法，我国古代曾用歌诀形式来表示，这首歌也叫做“孙子歌”，内容如下：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，除百零五便得知。

它的意思就是说，用 a 乘以70，用 b 乘以21，用 c 乘15，三个乘积相加的和减去105的某个倍数，就得到答案23。这就是著名的“孙子定理”。直到18世纪，这一定理由德国数学家高斯再次给出。

17～19世纪，高斯等人的工作发展和丰富了初等数论。1640年费马提出一个他未给出证明的定理：如果P是素数，那么对任何整数a，a^p-a 都是P的倍般，即所谓费马小定理。歌拉于1736年首先证明，又于1760年，把它推广到合数的情形。1772年，拉格朗日证明了费马提出的又一定理：每一个正整数都能够表成4个整数的平方和。1798年勒让德（Adrien-Marie Legendre，1752～1833，法国数学家）的第一部数论教科书出版。1801年高斯著名的《算术研究》一书问世，他在书中证明了二次互反律、原根存在的充分必要条件等结果。这些工作奠定了初等数论的基本内容。

初等数论中某些问题的研究，促使形成新的数学分支。如对不定方程和高次互反律的研究，促进了代数数论和类域论的形成和发展。近十年来，初等数论在计算机科学、组合数学、代数编码、密码学、计算方法、信号的数字处理等领域内得到广泛的应

用。同时，许多新的问题不断出现，从而促进了初等数论的继续发展。初等数论的内容和方法已是研究近代数学和应用学科所不可缺少的工具。

2．解析数论

解析数论是用数学分析作为工具来解决数论问题的分支。数学分析是以函数作为研究对象的、在极限概念的基础上建立起来的一些学科的总称。解析数论是解决数论中艰深问题的强有力的工具。

分析方法在数论中的应用，可以追溯到18世纪，数学家欧拉用解析方法证明了"质数有无限多个"的命题，其中用到了数学分析中有关无穷级数的若干知识。他提出了母函数法，利用幂级数来研究整数分拆，这导致圆法和指数和方法的产生。后来，狄利克雷应用分析方法于1837年解决了首项与必差互素的算术级数中有无限多个素数的问题，又于1839年推证出二次域的类数公式。创立了研究数论的两个重要工具，即狄利克雷（剩余）特征与狄利克雷L函数，奠定了解析数论的基础。

1859年。黎曼发表了一篇关于不大于X的素数个数 $\pi(x)$的著名论文《论不大于一个给定值的素数个数》，他认为素数性质可以通过复变函数 $\xi(S)$ 来探讨，并对复变函数 $\xi(S)$ 做了深刻的研究，得到许多重要的结果。特别是他建立了一个与 $\xi(S)$的零点有关的表示$\pi(x)$的公式。因此研究素数分析的关键在于研究复变函数 $\xi(x)$ 的性质，特别是 $\xi(S)$ 的零点性质。他猜想 $\xi(S)$ 的零点完全在穿过 $S=½$点的那条与实轴垂直的直线上。这一杰出的工作，是复变函数论的思想和方法应用于数论研究的结果。后人称 $\xi(S)$ 为黎曼 ξ 函数，称上述猜想为黎曼猜想。这个猜想直到现在也没有解决。黎曼开创了解析数论的新时期，也推动了单复变函数的发展。

在数论中应用分析方法，大致有两种情况：一是数论问题本身不涉及分析概念。有一些问题应用分析方法可使证明简单、可以对问题做定量研究，例如应用母函数法对整数分拆的一些恒等

式的证明、欧拉证明素数有无穷多个的分析方法等。二是数论问题本身必须用分析概念才能表达清楚。例如关于素数定理，即不大于x的素数个数$\pi(x)$ 等于多少的问题。此外，利用分析概念还可提出新的数论问题，例如各种数论函数的阶估计及均值估计。

20世纪30年代，苏联学者维诺格拉多夫（Nвая Матвеевич Виноградов，1891～1983，前苏联数学家）创造性地提出了"三角和方法"，这个方法对解决某些数论难题有着重要的作用。比如在解决"充分大的奇数可以表示成三个质数的和"的问题中，维诺格拉多夫令N是一个充分大的奇数，用$I(N)$这个符号来记N表示成三个质数的和的表示法的数目。换句话说，$I(N)$就是方程式

$$N=P_1+P_2+P_3,$$

其中P_1，P_2，P_3都是质数时的解的数目。

如果能确定$I(N)>0$，就表明充分大的奇数可以表示成三个质数的和。

维诺格拉多夫最后利用解析的方法解决了"任何一个充分大的奇数都是三个质数的和"这个问题。

解析数论与复变函数论、级数论、概率论等数学分支关系密切，它的研究方法对代数数论和几何数论都有重要的应用。

3．代数数论

代数数论是数论的一个分支。它以代数整数，或者代数数域为研究对象，不少整数问题的解决要借助于或者归结为代数整数的研究。因此，代数数论也是整数研究的一个自然的发展。代数数论的发展也推动了代数学的发展。

代数数论主要起源于费马大定理的研究。法国数学家费马在学习与翻译丢番图的《算术》一书时，在书边上写下了著名的"大定理"，即方程$x^n+y^n=z^n(n>2)$没有$xyz\neq0$的整数解。他说他已得到了这个结果的证明，由于地方太小而未写下。可是直到现在，300多年来经过许多数学家的努力，这个"大定理"还没有能够得到证明。

容易看出，这个结果的证明，可以归结到n=4以及n为奇素数的情形。费马本人给出了n=4的证明，欧拉与勒让德证明了n=3的情形，狄利克雷证明了n=5的情形。虽然对于许多奇素数人们已经证明了这个结果，但始终没有得到一个一般的证明。

库默尔(Ernst Eduard Knmmer,1810～1893，德国数学家是努力证明费马大定理的数学家之一。他在证明中引进"理想数"的概念，他随之证明，每个"理想数"可以唯一地分解成素因子的乘积，因而就建立了分圆域上的数论。戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind 1831～1916，德国数学家)把库默尔的工作系统化并推广到一般的代数数域，为代数数论奠定了基础。

数学家高斯最早把整数概念定义放前推广到 $a+bi$ 形式的代数整数，高斯证明了对这些 $a+bi$ 形式的"整数"关于带余除法的定理是成立的，其中 a、b 是通常的整数（有理整数），i 是虚单位。高斯的证明说明有理整数范围中整除性的规律对于这种"高斯整数"也是成立的。

高斯整数 $a+bi$ 实际上是

$$x^2-2ax+(a^2+b^2)=0$$

的根，其中方程系数是有理整系数。我们不妨把普通的有理整数 a 看作有理整系数方程

$$x-a=0$$

的根。这样，人们进一步把由系数是有理数的代数方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0=0$$

的根叫做代数数，如 $\sqrt{2}$、i、全体有理数等都是代数数。可以证明，全体代数数也构成一个域。另外，规定所谓代数整数是指系数是有理整数而且最高次项系数是1的代数方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0=0$$

的根。

很容易看出，$\sqrt{2}$、i、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等都是代数整数。也可以

证明，两个代数整数的和、差、积仍然是代数整数。

数学家把整数概念推广到一般代数数域上去，相应地也建立了素整数、可除性等概念。研究代数数域的算术性质与代数性质之间的联系是代数数论的一个重要的方面。对代数数论的深入研究推动了代数学的发展。

4 几何数论

几何数论又称数的几何，是应用几何方法研究某些数论问题的一个数论分支。

17～18世纪，拉格朗日和高斯已经开始以几何观点研究二次型的算术性质。1891年德国物理学家兼数学家闵科夫斯基(1864～1909年）发表了几何数论的第一篇论文，并于1896年出版了《数的几何学》一书，为几何数论奠定了基础，从此，几何数论成为数论的一个独立分支。

几何数论是研究"空间格网"，它在给定的直角坐标系中，坐标全是整数的点，叫做整点；全部整点构成的组就叫做空间格网(见图5-1)。

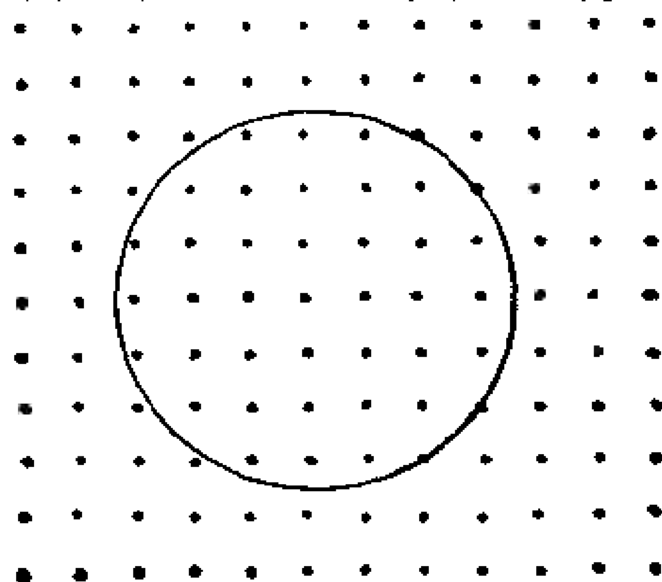


图 5-1

空间格网对几何学和结晶学有重大的意义，对它的研究也紧密联系着象系数和变数都是整数的二次型理论这样重要的数论问题。

我们可以举二维空间的例子来说明怎样利用格子点数去计算平面上有限区域的面积，或者是反过来，在平面上已知面积的一个有限区域内计算至少包含有多少格子点。这种问题的研究可以解决用离散量去逼近连续量的方法或者反过来可以用连续量去估计离散的量。数学家曾经得出"数的几何"的基本定理，这条定理的内容是："关于原点对称的凸区域，如果除原点以外，不包含其他格点，它的面积顶多是4"。利用这条定理，二维空间的一些问题就不难解决了。

几何数论是研究丢番图逼近论、代数数论的重要工具。

5．超越数论

超越数论以超越数为研究对象，它是数论的一个分支。

全体复数可分为两大类：代数数和超越数。如一个复数是某个系数不全为零的整系数多项式的根，则称此复数为代数数．不是代数数的复数，叫数超越数．刘维尔 Joseph Liouville 1809～1882，法国数学家）开创了对超越数的研究，他发现无理代数数的有理逼近的精密性有一个限度，借此他于1844年构造出历史上第一批超越数，例如$\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$对$g=2$，3，……都是超越数．早在1844年以前的1个世纪里，对无理数的研究已成为一个注意集点。1744年欧拉证明了自然对数的底e是无理数。1761年朗伯(Johann Heinrich Lambert，1728～1777，德国数学家）证明了圆周率π是无理数．后来，1873年埃尔米特（Charles Hermite，1822～1901，法国数学家）证明了e是超越数，从而使超越数论进入一个新阶段。1882年林德曼（Ferdinand Limdemann，1852～1939，推广了埃尔米特的方法，证明了π是超越数，从而解决了古希腊的"化圆为方"问题。

19世纪超越数论的最高成就，是林德曼一维尔斯特拉斯定理：如果α_1，α_2，……，α_n是不同的代数数，B_1，B_2，……，B_n是非零代数数，则

$$B_1e^{\alpha_1}+B_2e^{\alpha_2}+\cdots\cdots+B_ne^{\alpha_n}\neq 0。\qquad (1)$$

由此可以导出，如果a_1，a_2，……a_n在有理数域 Q 上线性无关，则 e^{a_1}，e^{a_2}，……e^{a_n}代数无关（即它们不适合任一其系数为有理数的多项式方程）。由(1)可知，如 a 是非零代数数，则 $\sin a$，$\cos a$，$\tan a$ 都是超越数；如 a 是不等于 0 和 1 的代数数，则自然对数 $\ln a$ 是超越数。

1900年希尔伯特提出的23个问题中第 7 问题是：如果 a 是不等于 0 和 1 的代数数，b是无理代数数，那么 a^b 是否超越数？后来盖尔丰德（Александр Осипович Гельфонд，于1934 年证明了：若a不为零或 1 的代数数，b是二次复代数数，则 a^b 是超越数，特别是$e^{\pi}=(-1)^{-i}$是超越数。它现在称为盖尔丰德定理，解决了希尔伯特第 7 问题。

超越数论的最新发展使用着来自交换代数、代数几何、多复变函数论，甚至上同调理论的方法。它正处在活跃时期。

三、哥德巴赫猜想

数论中的许多问题是在对有限多个数观察试验的"系统尝试"中，利用不完全归纳得出"猜想"，这些"猜想"后来经过严格的证明，有一些被推翻了，有一些被证明后就成了数论中的定理，有一些至今未能给出证明的仍然叫做"猜想"。例如哥德巴赫猜想就是数论中被看作是"皇冠上的明珠"的一个著名问题。1742年德国人哥德巴赫（Christian Goldbach，1690～1764 年）写信给欧拉，提出了这样的推测："每一个大于 2 的偶数都是两个质数的和"。比如：4＝2＋2，6＝3＋3，8＝3＋5，10＝3＋7，24＝11＋13，100＝3＋97，等等。验算的数越多，越增强这个推测的可信程度。不久，欧拉复信给哥德巴赫说："任何大于 4 的偶数都是两个素质数的和，虽然我还不能证明它，但是我确信无疑认为这是完全正确的定理"。这个推测，欧拉一直到死也未能给予证明。

推测提出200多年来，一直没有人能够给出证明，它成了一

道著名的难题，吸引着许多数学家去研究，并被叫做“哥德巴赫猜想”。在1900年，德国数学家希尔伯特（David Hilbert，1862～1943年）在一次国际数学家的演说中，提出了具有重要意义的23个问题，哥德巴赫猜想被列为第8个问题的一部分。1921年，英国数学家哈代(Godfrey Harold Hardy，1877～1947)曾说，哥德巴赫猜想的困难程度是可以和任何没有解决的数学问题相比的。

20世纪，数学家对哥德巴赫猜想刻苦攻关，取得了重大进展。1958年，数学家王元证明了(2＋3)；1962年，潘承洞证明了(1＋5)；同年，王元、潘承洞又证明(1＋4)；1965年，维诺格拉多夫、庞皮黎等证明了(1＋3)；1966～1973年，陈景润证明了(1＋2)，即任何一个大偶数＝1个质数＋至多2个质数的乘积，

$$100=23+77=23+11\times7,$$

1977年，《中国科学》第二期公布了陈景润的论文《大偶数表示为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和》。陈景润的结果被誉为《陈氏定理》，在国际数学界引起了强烈的反响，国外数学界称赞陈景润的论文是解析数论的名作，是筛法的光辉顶点，是对研究哥德巴赫猜想的重大贡献。

四、数论的应用

数论是一门高度抽象的基础学科，长期以来，它的发展处于纯理论研究状态，它对数学理论的发展起到了积极的作用。

近年来，数论也开始应用于实际，由于电子计算机科学和应用数学的发展，数论得到日益广泛的应用。众所周知，无论什么问题必需离散化之后才能在计算机上进行数值计算，所以离散数学日益显得重要，而离散数学的基础之一就是数论。数论最初研究对离散量的计算，而后又发展成用解析方法对连续量进行计算，现在由于高速电子计算机的发展，用离散量的计算去逼近连续量而达到所要求的精度已成为可能了。还有近20年发展起来的高维数值积分的数论网格法的研究中，数论的成果曾被广泛运

用。一致分布理论、指数和估计，经典代数数论都被用到，甚至丢番图逼近论中施密特关于代数数的联立有理逼近定理也被用到，在华罗庚、王元的《数论在近似分析中的应用》一书中有详尽的论述。在编码和数字信号处理问题中，数论也有很重要的应用。在计算方法、代数编码、组合论等方面都广泛使用了初等数论范围内的许多研究成果。有文献报导，现在有些国家已应用"孙子定理"来进行测距，用原根和指数来计算离散傅立叶变换等。此外，数论的许多比较深刻的研究成果也在近似分析、差集合、快速变换等方面得到了应用。随着科学的发展、数论除其在纯粹数学中的基础性质外，已日益展现出直接应用的途径。这是近30年的事。

数论在中国古代有着悠久的研究历史。数论的研究也是中国近代数学最早开拓的数学研究领域之一。杨武之首先将近代数论将入中国。华罗庚、(1910～1985，江苏省金坛县人）柯召、闵嗣鹤等是这一领域的研究在中国的创始人，特别是华罗庚在解析数论方面的卓越成就，在国际上有广泛深入的影响，在他的领导下，培养出一批优秀的中国数论学家。

第六章　非欧几何学和拓扑学

19世纪，随着数学的迅速发展，产生了新的几何学——非欧几何学，它突破了2000多年来的欧氏几何学，推动几何学的发展，是数学史上的重要成就之一。

一、非欧几何学

非欧几何是不同于欧几里得几何学的几何体系，一般是指罗巴切夫斯基几何(双曲几何）和黎曼的椭圆几何，尤其是前者。它们与欧氏几何最主要的区别在于公理体系中采用了不同的平行公理。

1. 非欧几何的产生

直到18世纪末，人们认为现实的空间只能是欧几里得几何所描述的那种形式，即所谓绝对"平直"的空间，不可能还有别的什么形式。所谓空间"平直"，主要体现在平行公设中，即在平面上过直线外一点，只能作一条直线和它不相交，这种不相交的直线就称为平行线。"平直"空间理论还认为三角形三内角之和等于180°。它的曲率等于零。17～18世纪的牛顿力学，就是建立在这种空间观念上。牛顿认为空间本身就象庞大无比的空箱子，它和物质的运动毫无关系，这就是牛顿的绝对空间。

但是，客观世界物质运动的形态是多种多样的，其空间形式也必然是多种多样的，不可能是一种形式。随着实践规模的扩大，在航海中发现地面是弯曲的，接近球面。19世纪，由于交通运输事业的发展，需要精确测量两地间的距离，这就要考虑曲面上的关系，促使人们对曲面进行深入研究。人们还通过天文观测来考察认识了遥远空间的特性。这样，由于实践规模的扩大，人们对空间的绝对"平直"发生了怀疑，逐渐形成了新的空间概念。

非欧几何的起源可追溯到人们对欧几里得平行公理的怀疑。从古希腊时代到公元1800年间，许多数学家都尝试根据欧几里得的其他公理去证明欧几里得平行公理，结果都归于失败。后来德国数学家高斯认为，欧几里得的平行公理既不是一条几何学定理，也不是几何学公理中必备的，它只对欧氏几何学才有效。如果把这个公理修改一下，变成"过已知直线外一点可以作多于一条与该直线平行的线"，则完全可以推出另一套几何学来。高斯早就已经明了非欧几何学的轮廓，但是由于怕新的理论不会被人理解，而会被人嘲笑，按他自己的话说："怕引起某些人的喊声"，因此一辈子都没有公开提出它的勇气，不仅如此，甚至在别人已经提出这个问题的时候，他也从来没有公开地表示支持。高斯研究非欧几何的情况，只是在他死后，从他跟一些数学家的通信和他的遗稿中才披露出来的。

高斯的大学同学匈牙利数学家鲍耶·法尔卡什(Farkas Bolyai，1775～1856)终生从事第五公设的证明，他的工作没有突出成绩，而且思想保守。但是他的儿子鲍耶·亚诺什(Janos Bolyai，1802～1860)，却获得了突出的成就。亚诺什1817～1822年在维也纳工学院读书的时候，就醉心于第五公理的证明。在1820年以前，他和萨开里的方法差不多。以后他逐渐认识到第五公理不能证明，决心创造新几何学。鲍耶·法尔卡什知道儿子也在搞第五公理的时候，多次写信坚决阻止他。但是，亚诺什还是继续研究，并有了新发现。1823年亚诺什写成了摈弃第五公理的《空间的绝对几何学》，他对父亲说："我已经在乌有中创造了整个世界"。1825年，亚诺什已经基本上完成了非欧几何学，请求父亲帮助出版，遭到了他父亲的拒绝，一直到1831年父亲才决定把儿子的创作作为一个附录出版在自己的著作中。出版前法尔卡什把附录寄给高斯，高斯接到附录后非常吃惊，并回信说："…称赞他等于称赞我自己，因为这里研究的一切内容，你的儿子所采用的方法和他所达到的一些结果，几乎和我的一部分在30～35年前已开始的个人沉思相符合，我真是被这些吓坏了。……"

第五公理问题的彻底解决者是罗巴切夫斯基。他1793年生于俄国，1810年获得喀山大学硕士学位，1816年23岁就成为数学教授。他开始也想找出第五公理的证明，后来，他认识到这样的证明是不可能的，他断定可能存在另一种几何学，决心创造新的几何学。这种几何学采用了欧氏几何的第五公理以外的所有公理，他把第五公理放到一边，提出了另外一个公理："过已知直线外一点至少可以作两条直线和已知直线不相交"。他建立了自己的公理系统，提出了新的几何，严密性并不比欧氏几何差。

罗巴切夫斯基在1826年2月11日喀山大学物理数学系会议上，宣读了报告《关于几何原理的讨论》。这一天被认为是"非欧几何学诞生日"。1829年，就是鲍耶·亚诺什的《附录》出版前3年，罗巴切夫斯基在《喀山通报》上发表了他的题目为《关于几何原本》的著作，在报告和著作中罗巴切夫斯基叙述了自己关于新几何的研究。

罗巴切夫斯基是几何学上的哥白尼，他创立的新几何学动摇了旧世界的基础，因而引起了教庭的反对。总主教宣布他的学说是邪说，有人用匿名信在反动杂志上谩骂他，荒唐无理的程度是史无前例的。嘲笑、侮辱，甚至宣布他是疯子。这一切正如高斯所估计的，也是高斯所害怕的。高斯是了解罗巴切夫斯基理论的人，他不敢公开地支持他，只在私人通信里说到自己对罗巴切夫斯基理论的钦佩。但是罗巴切夫斯基却从不屈服，坚持真理，一个人英勇奋斗到底。

1854年，德国数学家黎曼建立了更广泛的一类非欧几何——黎曼几何。与此同时，产生了拓扑流形的概念。

2．非欧几何学的内容

非欧几何有狭义的、广义的和通常意义的这三种不同的含义。狭义的非欧几何是指罗巴切夫斯基几何，广义的非欧几何泛指一切和欧氏几何不同的几何，通常意义的非欧几何是指罗氏几何（也叫双曲几何）和黎氏几何（也叫作椭圆几何）。

罗氏几何学的公理系统和欧氏几何学不同的地方仅仅是把欧

氏平行公理用"从直线外一点，至少可以作两条直线和这条直线平行"来代替，其他公理绝大部分相同。由于平行公理不同，经过演绎推理而引出了一连串和欧几里得几何内容不同的新的几何命题。

首先是关于平行线的定义。在欧氏几何学中把共面的两条不相交的直线叫做平行直线，而在罗氏几何中却规定了新的定义。所谓直线AA'和BB'平行，必须满足下列三个条件：

第一，直线AA'和BB'在一个平面上；

第二，直线AA'和BB'不相交；

第三，在$\angle ABB'$内，从B引直线一定和AA'相交（见图6-1）。

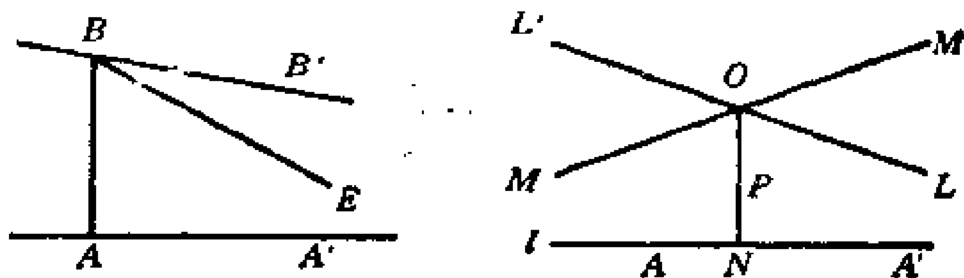


图 6-1

罗氏平行公理是这样说的：从直线L外一点O，恰好可以引和L不相交的两条平行直线OL和OM，如图所示。直线OL叫做右平行线，直线OM叫做左平行线。从O向直线L引垂直线ON，设$ON=P$，那么，$\angle NOL$就随P的变化而变化，把这个角叫作平行角．用$\pi(P)$来表示，当$P\to\infty$的时候，$\pi(P)\to 0$，当$P\to 0$的时候，$\pi(P)\to$直角。因为一般来说，$\pi(P)$小于直角，所以OL的反向线OL'离直线L越来越远。$\pi(P)$称为罗巴切夫斯基函数。

又如图6-2所示，c是a的右平行线。现在观察直线C上的一点X到直线a的距离XY，随着X点的移动，看看它将怎样变化？

从A_1向直线a引垂线A_1B_1，以点B_1向直线c引垂线B_1A_2；再从点A_2向直线a引垂线A_1B_2，从点B_2向直线C引垂线B_2A_3，很容易证明$A_2B_2<A_1B_1$，$A_3B_3<A_2B_2$。如果再继续这样作下去，点A_1、A_2、A_3……到直线a的距离变得越来越小，换句话说，就是

当点 X 向右移动的时候，它到直线 a 的距离 XY 逐渐变小，当点 X 趋向无限远的时候，$XY\to 0$，就是说平行直线 c 和 a 渐近地逼近。

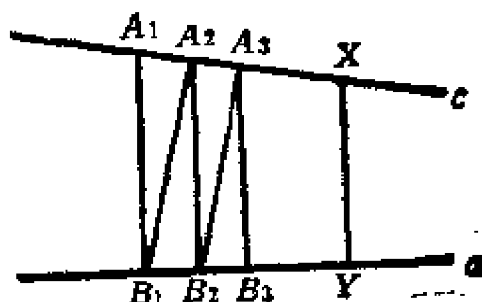


图 6-2

同时可以证明，它们的距离在相反方向不仅增大，而且趋向无穷。这个结论和欧氏几何里的平行线间的距离处处相等的概念差别多么大!

由于平行线的定义不同，平行线公理不同，因此，在欧氏几何中，凡是和平行线有关的一些命题，在罗氏几何中就有新的意义。如两条直线或者相交或者平行，或者既不相交又不平行，如果平行，它们在一侧渐近地逼近，而在另一侧则无限地分离。既不相交又不平行的两条直线称为一对分散线，它们之间的距离在两个方向都趋于无穷。

三角形各内角之和总小于两个直角，而且不同的三角形有不同的内角和。1866年，意大利数学家贝尔特拉米（Eugenio Beltrami，1835～1899）发现了实现这种几何的一个模型。这是向内凹陷的曲面，如高音喇叭形的特殊曲面，如图 6-3 所示，一般叫伪球面。它的曲率（即表示曲面在一点附近的弯曲程度的量）是负数。把伪球面上的测地线看作直线，则三角形的三内角和就小于180°。这种非欧几何学，承认了空间的弯曲，它的曲率是一个非零负常数。这种几何学所描述的空间各处一样弯，其性质不"因地而异"，这种罗氏几何又叫双曲几何学。

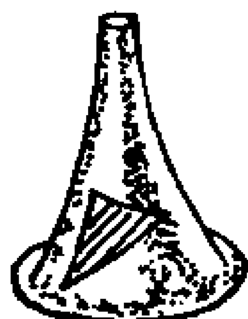

伪球面

图 6-3

19世纪中叶，更大范围的天文学观测使人们明确了许多恒星到地球的距离，黎曼在研究引力理论和电磁理论的过程中，提出空间形式和物质运动形态相互关联的问题。他认为，当人们的观察范围不断地向宇宙空间发展时，客观世界的空间形式可能有变化，空间的曲率是变量，既可以是正，也可以是负，又可以是 0，而

且各处可以不同弯曲，还存在着差异，这又是一个进步。

欧氏几何的三角形内角和是等于180°的，罗氏几何的三角形内角和小于180°，黎曼几何的三角形内角和大于180°。这是黎曼几何跟欧氏几何、罗氏几何的一个不同的特点。因为在黎氏几何中，"直线"是球面上的大圆弧，球面上三条这样的直线可以构成一个三角形。例如，在右图的球面上过北极N和南极S的两条大圆弧（也叫做子午线）和赤道围成一个三角形，也就是图中的$\triangle NAB$。我们知道，子午线是垂直于赤道的，因此，这样的球面三角形的三个角中已经有了两个直角，再加上第三个角，三角形的三内角和就大于180°。

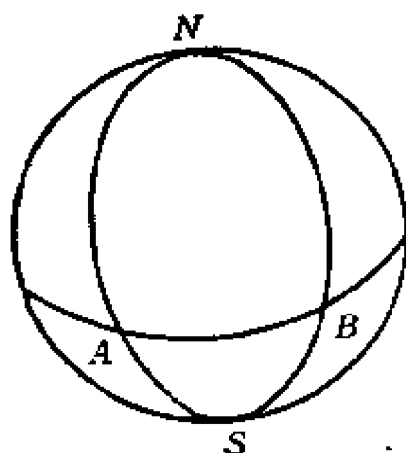


图 6-4

在黎曼几何里，作为直线是球面上的大圆弧，因此，两条"直线"（也就是两个大圆弧）总是相交在球面的两个对径点上。这样，对于欧氏几何和罗氏几何关于通过两个不同的点只能引一条直线这个基本命题，在黎曼几何里是不成立的。

在黎曼几何里还有欧氏几何和罗氏几何里都不成立的命题。这个命题是：每两条直线都有（一个）公共点。这个命题很明显，因为每两个大圆都有一对对径的交点。换句话说，就是在黎曼几何的平面上没有平行直线。

黎曼几何就是这样一种几何学。它符合结合公理，但是没有平行线。而且三角形的内角和大于180°，称为椭圆几何。

3．非欧几何的意义

非欧几何的创建打破了欧氏几何的一统天下，从根本上革新和拓广了人们对几何学观念的认识。它打破了康德关于欧氏几何是先天的、唯一的现实空间的观念，是人类空间认识史的一次飞跃。1872年，克莱面（Chrstian Felix klein，1849～1925，德国数学家）从变换群的观点对各种几何学进行了分类，提出著名

的埃尔朗根纲领，这个纲领对于几何学的进一步发展曾经发生重大影响。

非欧几何的创建导致人们对几何学基础的深入研究。它开拓了几何原则的新发展，扩大了几何学研究对象和范围，引起新的几何学产生。它使人们认识到几何学中的公理系统并非是唯一的，欧氏几何公理系统中改变第五公理就产生了罗氏几何——双曲几何的公理系统，表明公理化方法是数学研究的一大推动力，这对后来的数学发展有重大的影响。希尔伯特于1899年建立了一套严格的欧氏几何的公理系统。继几何学之后，数学家们又建立并研究了如算术、数理逻辑、概率论等一些数学学科的心理系统，公理化方法已成为现代数学的重要方法之一。

非欧几何的创建不仅推广了几何学观念，而且对于20世纪初期物理学中发生的关于空间和时间的物理观念的改革也起了重大作用。非欧几何学首先提出了弯曲的空间，它为更广泛的黎曼几何的产生创造了前提，而黎曼几何后来成了爱因斯坦广义相对论的数学工具。爱因斯坦在狭义相对论里主要和基本的命题是：空间和时间有不可分割的密切关系。而在广义相对论里放弃了关于时空的均匀性的观念，他认为时空只是在充分小的区域里近似地均匀的，但是其整体却不是均匀的。在物理学中的这种解释，恰恰是和"在无穷小范围内"欧氏几何式的黎曼空间的观念相似。这个广义相对论里的时空就可以解释为一种黎曼空间。按照相对论的观点，宇宙结构的几何学不是欧氏几何学而是接近非欧几何学。

非欧几何学在数学的一些分支中有着重要的应用，它们互相渗透，促进着各自的发展。黎曼几何不仅是微分几何的基础，也应用到微分方程，变分法和复变函数论等方面。庞加莱利用复平面上作出的罗巴切夫斯基几何模型证明了自守函数的基本区域是一些彼此全同的多边形。这个结果对于建立自守函数理论有重要的作用。正如希尔伯特所说的："19世纪最有启发性、最重要的数学成就是非欧几何学的发现"。

二、拓扑学

拓扑学是19世纪发展起来的一个重要的几何分支。通常的初等几何是研究图形经刚体变换后仍保持不变的性质，所以叫做刚体几何学，射影几何研究图形在射影对应下不变的性质。而拓扑学是研究图形经过拓扑变换后不变的性质。所谓拓扑变换就是一一对应的双方连续变换。让我们打一个通俗的比方。在一块橡皮上面画一个圆A，再将橡皮扭歪、拉伸、压缩(不拉断、不重叠)，A便变皮一个歪歪扭扭的图形B，A和B的形状很不相同，但A上每一点都变成B上一个点，不会出现两个点变成一个点或一个点变成两个点的情况，这叫做一一对应。此外，A上两个非常接近的点a_1、a_2，变成B上的两个点b_1、b_2后，他非常接近；反之，B上任意两个很接近的点，原来在A上也很接近，这叫做双向连续。一一对应而且双方连续的变换叫做拓扑变换.(见图6-5)。

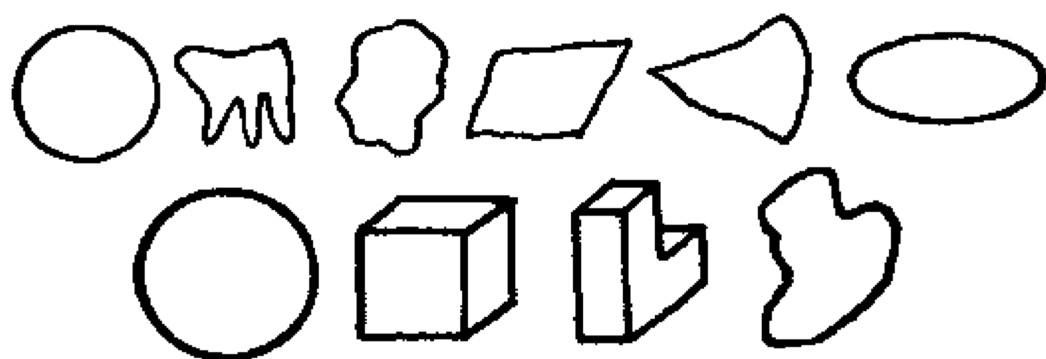


图 6-5

1. 拓扑学发展简史

拓扑学起初叫形势分析学，这是莱布尼茨1679年提出的名词(形指一个图形本身的性质，势指一个图形与其子图形相对的性质，扭结和嵌入问题就是势的问题)。拓扑学从欧拉于1736年解决七桥问题开始，这是数学史上著名的“哥尼斯堡七桥问题”，它的确生动地说明了象拓扑学这种数学语言是如何轻而易举地解决了那种单靠日常的自然语言所无法解决的难题的。

18世纪，东普鲁士的哥尼斯堡地区有一条布勒格尔河横贯城

匠。它是由新河和旧河两条支流在城中心汇合成的。在河中心有个叫克奈芳福的岛屿，河上有七座各具特色的大桥（见图6-6）。在克奈芳福岛上有一所古老的哥尼斯堡大学。每天傍晚时分，这所大学的学生们总要散步于这七座大桥之间。他们常常想如此通过这七座桥：既不重复，又不漏过任何一座桥，可是，他们总也达不到目的。于是，他们写信给数学家欧拉，请他帮助解决这个难题。

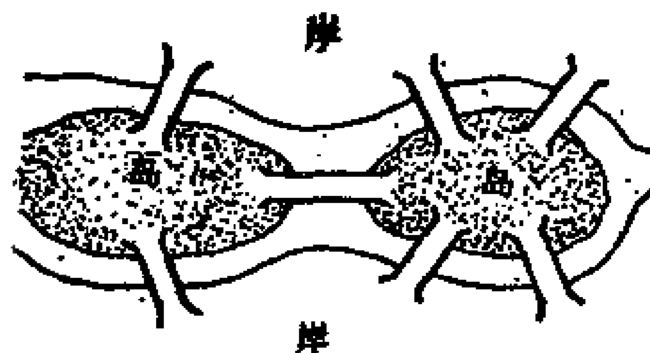
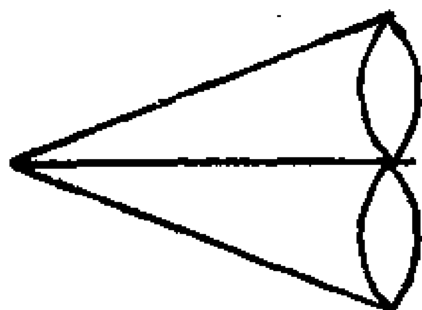


图 6-6

欧拉接到信后，他想，既然岛与半岛是桥梁的连接地点，两岸陆地也是桥梁通往的地点，那末不如把这四处地点缩小成四个点，并把七座桥表示成七条线（见图6-7）。于是，人们无重复地走过这七座桥的问题，就相当于用一笔画出图的几何图形。这就是所要解决的"七桥问题"的数学模型。这里，岛、半岛和陆地的具体性质不见了，留下来的是抽象的数学点；桥的具体性质也不见了，剩下来的是线。


图 6-7

接着，欧拉在这种符号语言的基础上推演论证。他着重考虑的就是这"一笔画"的数学结构特征，一笔画有起点和终点，起点和终点重合者被称为封闭图形，否则便称为开放图形。除起点和终点外，一笔画中间可能出现一些曲线的交点，在这些交点外曲线一进一出，因此通过的曲线总是偶数条，这些交点就称为"偶点"。由此看来，只有起点和终点处通过的曲线可能是奇数条，此时起点和终点可称为"奇点"。特别当起点与终点重合时，便成为

一个偶点，或者成为一个一般点，当然不能再是奇点。欧拉证明了，任何一个一笔图，要么没有奇点，要么有两个奇点，而七桥问题所对应的图形中，四个点都是奇点，因此它超出了一笔画的范围，不能由一笔画成，即一次无重复地走过七座桥是不可能的。

欧拉把上述论证的结果以信的方式告诉了哥尼斯堡大学的同学们，同学们对他令人信服的推论极为满意，这件事发生在1735年，它作为拓扑学和现代图论的发端在数学史上是很有名的。

1851年黎曼在复变函数的研究中提出了黎曼面的几何概念，并且强调，为了研究函数、研究积分，就必须研究形势分析学，从此开始了拓扑学的系统研究。黎曼本人解决了可定向闭曲面的同胚分类问题。在几何学的研究中黎曼明确提出n维流形的概念。

组合拓扑学的奠基人是庞加莱，他是在分析学和力学的工作中，特别是在关于复函数的单值化和关于微分方程决定的曲线的研究中，走向研究拓扑学的道路的，他的主要兴趣在n维流行。在1895～1904年间，他创立了用部分研究流形的基本方法。他引进了许多不变量：基本群、同调、贝蒂数、挠系数，并提出了具体计算的方法。他探讨了三维流形的拓扑分类问题，提出了著名的庞加莱猜想。

2．拓扑学的内容

拓扑学建立后，由于其他数学发展需要，它也得到了迅速的发展。特别是黎曼创立黎曼几何以后，把拓扑学概念作为解析函数论的基础，更加促进了拓扑学的进展。

点集拓扑是扑拓学的一个重要分支，主要研究拓扑空间的自身结构及其间的连续映射。20世纪以来，集合论被引进了拓扑学，为拓扑学开拓了新的前景。点集拓扑学中一些需要精确化描述的问题都可以应用集合论来论述。

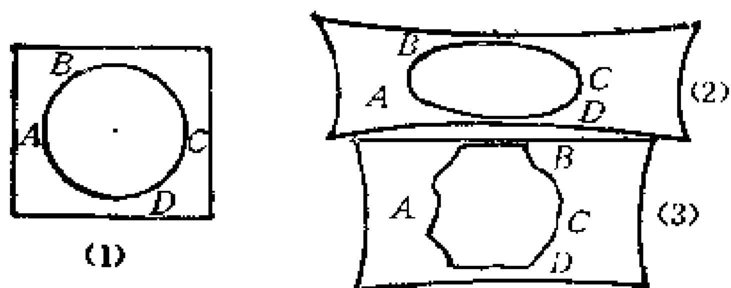


图 6-8

的一个点。如果这集合的每个点都能被包围在只由这集合的一部分点的领域所组成的并集之中，这集合就是开集。如果一个集合含有所有极限点，它就是闭集。

系密切的点集拓扑学的研究。经过中外学者的努力，现已形成了称之为不分明拓扑学（即模糊拓扑学）这个生机勃勃的研究领域。

代数拓扑学是拓扑学的另一分支，偏重于用代数方法来研究，它的前身是组合拓扑学。现在点集拓扑学与代数拓扑学又有统一的趋势。

因为大量自然现象具有连续性，所以拓扑学具有广泛联系各种实际事物的可能性。通过拓扑学的研究，可以阐明空间的几何结构，从而掌握空间之间的函数关系。本世纪30年代以后，数学家对拓扑学的研究更加深入，提出了许多全新的概念，如一致性结构概念、抽象距离概念等等。随着抽象代数的兴起，1925年诺特（Max Noether，1844～1921，德国数学家）提议把组合拓扑学建立在群论的基础上，在他的影响下，霍普夫（Heinz Hopf，1894～1971，德国数学家）1928年定义了同调群。从此组合拓扑学逐步演变成利用抽象代数的方法研究拓扑问题的代数拓扑学。艾伦伯格与斯廷罗德1945年以公理化的方式总结了当时的同调论，后写成《代数拓扑学基础》（1952年），对于代数拓扑学的传播、应用和进一步发展起了巨大的推动作用。他们把代数拓扑学的基本精神概括为：把拓扑问题转化为代数问题，通过计算来求解。

3．拓扑学的应用

连续性与离散性这对矛盾在自然现象与社会现象中普遍存在着，数学也可以粗略地分为连续性与离散性的两大门类。拓扑学对于连续性数学自然是带有根本意义的，对于离散性也起着巨大的推进作用。拓扑学的基本内容已经成为现代数学工作者的常识，拓扑学被广泛应用于其他数学分支。

拓扑学中的纤维丛理论（是拓扑乘积的推广）和微分几何中的联络论一起为理论物理学中扬-米尔斯规范场论提供了现成的数学框架，犹如20世纪初黎曼几何学对爱因斯坦广义相对论的作用。规范场的研究又促进了四维的微分拓扑学出人意料的进展。

拓扑学对于分析学的现代发展起了极大的推动作用。随地科学技术的发展，需要研究各式各样的非线性现象，分析学更多地求助于拓扑学。微分拓扑学的进步，促进了分析学向流形上的分析学（又称大范围分析学）发展。在托姆的影响下，微分映射的结构稳定性理论和奇点理论已发展成为重要的分支学科。在多复变函数论方面，来自代数拓扑的层论已经成为基本工具。

拓扑学的需要大大刺激了抽象代数学的发展，并且形成了两个新的代数学分支：同调代数与代数K理论。代数几何学从50年代以来已经完全改观。托姆的协边论直接促使代数簇的黎曼-罗赫定现的产生，后者又促使拓扑K理论的产生。

范畴与函子的观念，是在概括代数拓扑的方法论时形成的。范畴论对各种代数结构进行了统一的研究，对拓扑学本身也有影响，如拓扑斯的观念大大拓广了经典的拓扑空间观念。

在经济学方面，诺伊曼（John von Neumann，1903～1957，匈籍美国数学家）首先把不动点定理用来证明均衡的存在性。在现代数理经济学中，诸如经济的数学模型，均衡的存在性、性质、计算等根本问题都离不开代数拓扑学、微分拓扑学、大范围分析的工具。在系统论、对策论、规划论、网络论中拓扑学也都有重要应用。

托姆以微分拓扑学中微分映射的奇点理论为基础创立了突变理论，为从量变到质变的转化提供各种数学模式。在物理学、化学、生物学、语言学等方面已有不少应用。

拓扑学的概念和方法对物理学（如液晶结构缺陷的分类）、化学（如分子的拓扑构形）、生物学（如DNA的环绕、拓扑异构酶）都有直接的应用。

拓扑学与各数学领域、各科学领域之间的边缘性研究方兴未艾。

第七章 抽象代数学

抽象代数是关于运算的学说，但它不把自己局限在研究数的运算的性质上，而是企图研究更具一般性的元素上运算的性质，它在数学分支中起着重要作用。本章介绍一下抽象代数的产生、发展及其内容。

一、伽罗瓦和群的思想

客观事物物体的形状往往具有这样那样的"对称性"。对于这些"对称性"的研究常常可使得人们加深对于物体的某些性质的认识，其中就孕育着"群"的概念。例如保留下来的中国敦煌壁画中的"边饰"、"顶光"、"藻井"以及其他文明古国的早期建筑和物品，都有很多带"对称性"的图像；在自然界中，矿物结晶体也显示出"对称性"。但是直到18、19世纪之交，才逐渐产生和形成数学中的"群"的概念。

"群"的概念是在研究五次以上方程是否可用根式求解时产生的。我们知道，直到19世纪初，代数学仍未超出解方程的范围。但是，二次方程的解法，在巴比伦和中国早已掌握了。我国早在7世纪已获得了三次方程的近似解法，到13世纪，秦九韶发现了高次方程的近似解法，欧洲到16世纪发现三次和四次方程的解法，在文艺复兴时代意大利数学家塔尔塔利亚（Nicolo Tartaglia，1500～1557）首先解决三次方程，1535年2月22日，他在米兰和别人竞赛解3次方程的题目，竞赛双方各出30道题目给对方，谁解得最多最快，谁就获胜。2小时之内，塔尔塔利亚解完了30道题目，对方却一道也没有解出。获胜后，塔尔塔利亚经过进一步探索，终于找到了三次方程的一般解法。他的解法一直保密不肯公布，后来他把公式告诉了意大利数学家卡尔达诺

(Girolamo Cardano，1501～1576)，人们把这个公式叫做卡尔达诺公式，其实，它应该叫作塔尔塔利亚公式。3 次方程解出后，4 次方程很快也被意大利数学家费拉里(Ludovico Forrari 1522～1565年) 解决。这就很自然地促使数学家们继续努力寻求五次以及五次以上的高次方程的解的公式。数学家经过 3 个世纪的努力探索，都没有得到解决。

到了19世纪初，挪威的数学家阿贝尔证明了一般的五次以上的方程没有解的代数公式。阿贝尔的这个断言并不是说这样的方程没有解，而是说一般的五次以上的方程的解，不可能像一次、二次、三次方程的解那样，用方程的系数通过加、减、乘、除、乘方、开方这些代数运算表示出来。

后来，五次或五次以上的方程何时才能有代数解的问题，由法国青年数学家伽罗瓦彻底地解决了。伽罗瓦 20 岁的时候，因为积极参加法国资产阶级革命活动，曾两次被捕入狱。1832年 4 月，他出狱不久，便在一次私人决斗中死去，死的时候才21岁。临死前他预料自已难以摆脱死亡的命运，所以连夜给朋友写信，仓促地把自己生平的数学研究心得扼要地写出，并附以论文的手稿。他在给他的朋友舍瓦利叶的信中说道："我在分析方面作出一些新发现。有些是关于方程论的，有些是整函数的。……公开请求雅可比或高斯，不是对这些定理的正确性而是对于它的重要性发表意见"。伽罗瓦死后，按照他的遗愿，舍瓦利叶把他的信发表在《百科评论》中。他的论文手稿过了14年，才由法国数学家刘维尔主办的刊物《纯粹与应用数学》杂志给予发表，题目是《关于方程用根号解的条件的记录》，刘维尔做了序，向数学界推荐。

伽罗瓦在数学史上做出贡献，不仅解决了几个世纪以来一直没有解决的高次方程的代数解的问题，更重要的他在解五次以上高次方程的根时，发现方程根的对称性是解决问题的关键，第一次提出"群"的概念，为群论的建立奠定基础，揭开了抽象代数的序幕。以后，把群论的基本原理同物质结构和运动的具体对称性相结合，就构成为研究物质微粒运动规律的有力工具。从而开辟了

代数学的一个崭新的领域，直接影响着代数研究方法的变革。从此，代数学不再以方程理论为中心内容，转向代数结构的性质的研究，促进了代数学进一步的新发展。

拉格朗日和高斯在研究数论中具有同一判别式D的二次型类，即$f=ax^2+2bxy+cy^2$，其中a、b、c为整数，x、y取整数值，且$D=a^2-bc$为固定值，对于两个型的"复合"乘法，构成一个交换群。戴德金于1858年和克罗内克于1870年在其代数数论的研究中也引进有限交换群，推动抽象群论产生。

德国数学家克莱因于1872年在其著名的"埃尔朗根纲领"中指出，"几何是研究在变换群下的不变量的科学"。克莱因和庞加莱在对"自守函数"的研究中曾用到其他类型的无限变换群，即似对无限群解译，但离散群与不连续群与无限群是各不相干的，其中有拓扑概念。1870年以后，M·S·李开始研究连续变换群即解析变换群，用来阐明微分方程的解，并待它们分类导致了李群理论的产生。

群论的发展导致20世纪30年代抽象代数的兴起，尤其是近30年来，有限群论取得了巨大的进展，1981年初，有限单群分类问题的完全解决是一个突出的成果。与此同时，无限群论也有快速的进展。

伽罗瓦提出群的观念使整个代数学的对象发生了根本的改变。代数理论开始只研究代数运算本身的性质，而不管对之施行运算对象的具体属性。当时，这种值离古典代数的"异端"，自然不会立即得到承认。又经过了四、五十年的时间，人们才逐渐认识到，数学的对象除了"数"与"形"之外，还有"群"这类抽象的东西。更深入的研究发现，群在数学中几乎无处不在，历时已久。不仅如此，群还是数学上某种统一性的象征，因此，克乘因就把几何学统一在群的旗帜之下。从此，群论的重要地位被数学界所承认。

然西，在很长的时间里，人们只停留在研究具体的群，也就是变换群。具体来说，就是由把方程的根互相置换的某些置换组

成的置换群，或者是把图形变到它自身的某些变换组成的变换群。那么，换否将各种具体的群的共同特征抽象出来嗯？即只考虑由抽象元素构成的群而不涉及到这些元素的具体特征。19世纪各种具体的群论接连出现，推动人们研究抽象群体论。

二、诺特与范·抽·瓦尔登的抽象代数

除了群论之外，抽象代象学另外两个分支也有了一定的发展，伽罗瓦不仅是群论的创造者，而且也开创了域论，早在1830年他就建立有限域的概念。抽象代数的另一个新分支是环论，这是由抽国数学家埃米·诺特来完成的。

埃米·诺特（Amalie Emmy Noether,1882～1935年）是德国杰出的女世学家，抽出身在一个以喜爱钻研学问而著称的犹太人家庭。父亲Max·诺特（1844～1921，德国象学家）是一位数学象授，是代世几何学专家。埃米·诺特的抽象代数的具体背景有些世是来自代数几何的。埃米·诺特最早的工作是关于不变式的，1907年她完成博士论文"n元形式的不变式理论"，这正是象后来抽象理象理论的实际背景。

埃米·诺特在克莱因和希尔伯特的相对论研究的思象影响下，在1918年发表了两博重要论文。一篇是把黎曼几何学和广义相对论中常用的象分不变式问题化为代世不变式问题。另一篇就是所谓诺特定理，把对称性、不变性和物理的守恒规律联系在一起，这问题直到今天仍然是物理学中的基本问题。

不变式时期之后，埃米·诺特开始走上自己独立创建"抽数代世学"的道路。诺特在研究代数学时，从不同领域的相似现象出发，把不同的对象加以抽象化，公理化，然后用统一的方法加以处理，而得出一般的理论。

实际上，抽象代数学所研究的博论、域论、环论（代数理论、理想论、模论），在经典数学中已经有各种具体实例，已经有离所与希尔伯特的一系列研究，他们都是诺特的抽象代数的先驱。

抽象代数应从拉格朗日时萌芽，伽罗瓦、阿贝尔时产生，19世纪有所发展，到20世纪20年代，以诺特为主发展"十分光辉灿烂"。诺特在1920年的第一篇抽象代数著作中就已提出许多重要概念，如左理想、右理想、剩余类、同构，这些已是代数中最基本的概念，1921年她写出的《整环的理想理论》是交换代数发展的里程碑，建立了交换诺特环理论，证明了关于理想准素分解合理。提出有限条件，已经成为诺特的定义。她还研究了代数理论，把自己的统一的抽象理论应用到数论的具体问题上并显示出了巨大威力。1926年她发表《代数数域及代数函数域的理想理论的抽象构造》，给戴德金环一个公理刻画，指出素理想因子唯一分解定理是一个充分必要条件。这两篇文章包含抽象代数的精髓。后来，诺特和亚历山德罗夫（Павел Сергеевич, Александров，1896～ ，苏联数学家）和霍普夫（Heinz Hopf，1894～1971，德国数学家）关于组合拓扑学的讨论，使群、模等概念进入组合拓扑学而导致代数拓扑的兴起。

诺特的代数理论很难理解，需要有人数一些普及工作，这就是她的学生荷兰数学家范·德·瓦尔登。他跟诺特学习过，后来又跟阿廷学习过，他在诺特和阿廷的讲义基础上。整理了《近世代数》一书，于1930年出版了第一卷，1931年又出版第2卷。该书传播了诺特的抽象代数思想，从根本上改变了代数学的整个面貌，使抽象代数发展很完善，这部书在数学界引起了轰动。抽象代数推动了代数概念、方法和对象的重大变化，使它的应用越来越广。

三、抽象代数学的基本思想

抽象代数是研究群、环、域、向量空间等的性质和结构，它包括群论、环论、域论等分支。

1. 群

群论是研究现实事物中的对称性质和规律，特别是事物对称的性质上的数量的运算。例如，在自然界，镜面对称的物体非常

之多，象人体乃至鸟兽虫鱼，大都是左右对称的，也就是说，好象有一个平面把物体分成两部分，其中一部分是另一部分的镜像。这称为是关于平面的对称。此外还有圆的中心对称以及对称轴和结晶群的对称。因此，可以用对称平面、对称轴、对称中心集成的“群”，来描述不同的物体的对称性质。群论在抽象代数中是很重要的，它是抽象代数的重要组成部分。

群的定义：一个具有二元运算(乘法或加法)的集合称为群，如果它满足下面4条公理：

公理Ⅰ(封闭性)，集合中定义一种抽象乘法，任何两个元素

[illegible]

何元素（整数）加起来还是那个元素，而且每一个整数都有一个逆数——"负"，它们两个加起来正好等于那个特殊元素0，说明所有整数成群，叫整数加法群。

（2）对所有正有理数的集合$\left\{\frac{a}{b}\middle| a\cdot b\text{为正整数}\right\}$，这里单位元素是1，每个有理数的逆是自己的倒数，$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$相乘运算正好等于1，叫正有理数乘法群。

（3）考虑集合的元素不一定是数，它可以是置换，运动（如平移、旋转、反射等），那就能够得出抽象群的概念.例如保持等边三角形不变的旋转，以三角形中心为轴旋转120°（用b表示），这个三角形仍然和它自身相重合，看来就象没有旋转过一样，旋转240°（用c表示），也是如此，而转360°（用1表示）就是不动。这是运动旋转的集合（b、c、1），运算叫"换着"，记作$\otimes$，$b\otimes c$就是先转120°，再"接着"旋转240°，当然总的效果是旋转360°，用公式表示$b\otimes c=1$，$b\otimes b=c$，$c\otimes c=b$，这种由3个元素构成的集合在"运算"$\otimes$之下，也有整数集合的那些性质。不管怎么"接着"旋转，转来转去还是这3种转法，其中单位元素就是1，b和c两元素互为逆元素。(见图7-1)。

（4）4个元素的置换群，比如说（1 2 3 4）变到另外一种排列如（4 3 2 1）的所有的代替法的集合，1 2 3 4相继施行经过两个置换，结果仍然是一个置换，即

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

这样置换构成一个"群"，其运算是"相继施行"，其单位元素是恒等置换。

（5）对确定的$n>0$，全体n阶矩阵的集合构成一个么半群。

（6）给定一个有限字母表，以其中字母拼成的所有有限长字母串（不包括空串）构成一个半群。

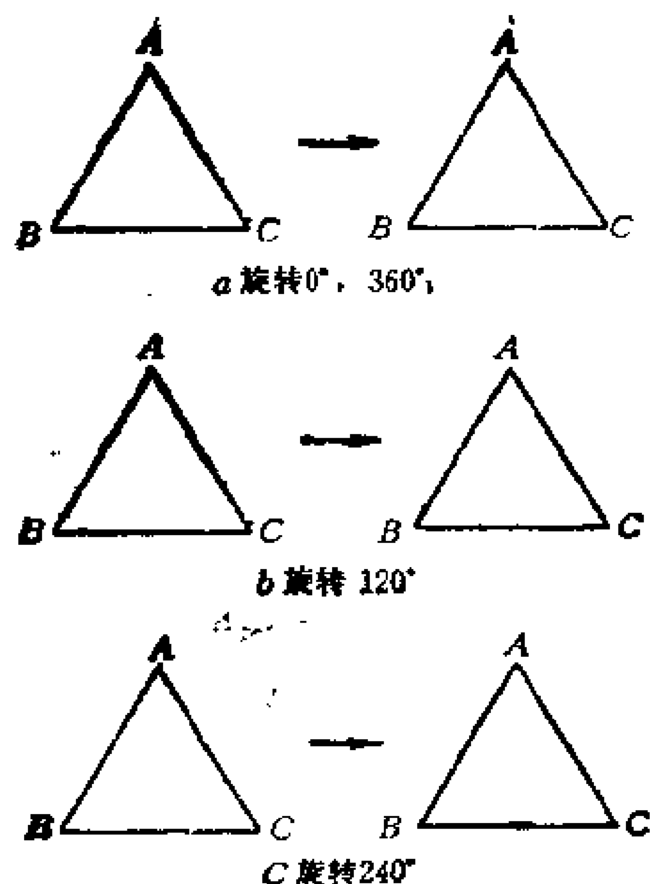


图 7-1

2. 环

什么是环？环是由集合的某些基本特性总结出来的概念，它是一个具有两种二元运算的代数系统。环是这样定义的：如果有一个非空集合，给它规定加法和乘法这两种代数运算，使得该集合对于加法运算为变换群，对乘法运算成一半群，且满足加法与乘法的分配律。这样的一个集合就叫做环。

举例来说，全体整数构成一个环，并且它的乘法还是可交换的，对给定的 n，全体 n 阶矩阵也构成一个环，但它的乘法是不交换的。

如果这个环的乘法还满足交换律，也就是 $ab=ba$，那么这个环就叫做交换环。如果这个环的元素都是数，那么这个环就叫做数环。

理想概念，设S是环R的一个非空子集，所谓S是R的一个左理想，意即①S是R作为加法群时的一个子群；②当$a\in S$，$x\in R$ 时

则$xa\in S$。若有$ax\in S$，则S称为R的右理想。如果S既是R的左理想，又是R的右理想，则称S是R的一个理想。

环论的发展可追溯到19世纪关于实数域的扩张及其分类的研究。戴德金、嘉当、哈密顿等人是发展超变系理论的主要数学家。后来，发展成一般域上的代数结构理论，是源于韦德伯恩在1907年发表的著名论文。诺特对环的理想论贡献最大，19世纪40年代后，一般环的根理想理论应时而起，对交换环的理想论研究比较深入，内容丰富，以后形成一门分支学科"交换代数"，它与代数几何，代数数论关系极为密切。

3．域

域论也是抽象代数中的一个新的特殊系统，域有时叫做体，它是一个特殊的环，也是抽象代数的重要概念。

关于域的概念，一般要比环稍为窄一些。它是这样定义的：A是一个含有单位元的交换环，对任一$a\neq 0$，必存在一个逆元素a^{-1}，使得$a^{-1}a=1$，这里1代表单位元，那么这个交换环A就叫做域。如果元素是数构成的域就叫做数域。

设F是至少含有两个元素的一集合，在F上定义了两个(二元)运算，一个叫做加法，一个叫做乘法，它们都满足交换律，结合律，而且乘法对于加法有分配律；对于加法，F有零元素，每个元素有负元素；对于乘法，F有单位元素，除去零元素外，每个元素有逆元素，这样的代数结构就称为域。例如全体形有理数、全体实数或全体复数在通常的运算下，都是域；又如全体形如$a+b\sqrt{2}$的数其中a、b是有理数，它们对加减乘除（零不作除数）是封闭的，因之也构成域。再如，取一素数P。考虑整数模P的全体剩余类$F_P=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \cdots\cdots,\overline{P-1}\}$，如果把通常的加法与乘法改成作完加法与乘法后，再取所在的同余类，那么在F_P上就定义了两个运算。由整数与素数的性质，容易验证，F_P是域。

域的概念是在19世纪代数学的发展中逐步形成并明确起来。在伽罗瓦研究方程的著作中就用到了域的概念。在戴德金与克罗内克（Leopold Kronecker，1823～1891，德国数学家)关于代

数数的著作里从不同的背景也提出了域的概念。域的抽象理论是由韦伯（Heinrich Weber，1842～1913，德国数学家开始的。稍后，戴德金和亨廷顿独立地给出了域的公理系统。在韦伯的影响下，施泰尼茨对抽象域进行了系统的研究。他的研究结果全写在他1910年的基本论文“域的代数理论”中。

4．向量

向量也叫做矢量。在普通线性代数中，除了数值还具有方向的量叫做向量。比如，一个有方向的直线段就是向量。向量通常用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等来表示，向量$\vec{a}$的数值的绝对值叫向量$\vec{a}$的模式者长，记成$|\vec{a}|$。$\vec{a^0}$表示$\vec{a}$的单位向量，也就是$|\vec{a^0}|=1$。模等于零的向量叫做零向量。向量还有分量，比如，平面上的一点由两个有次序的实数（x，y）来确定，空间上的一个点由三个次序的实数（x、y、z）来确定。那么，有序实数集合（x，y）、（x、y、z）等叫做向量，每个向量中的实数就叫做向量的分量。向量空间也叫做线性空间。

在抽象代数中，向量的诸分量不一定取自实数域，可以取自某一任意的抽象域，称为向量空间的基域，以F表某域，V表向量空间，则有：①V构成一个交换加法群。②F和V之间有乘法运算，乘积仍属于V。③对任意的F中元素a，b及V中元素u，V有：

$(ab)u=a(bu)$；

$a(u+v)=au+av$；

$(a+b)u=au+bu$；

以及$1u=u$；此处1是F的公元。

总之，抽象代数的出现使代数从古典代数以研究方程为中心转变为研究群、环、域、向量空间等各种代数结构的性质为中心，代数研究对象由数扩大到群、环、域、向量空间等，它的运算对象常常不是数，甚至不是量，而是抽象的元素。因此研究更

为一般的代数运算的规律和性质，就成为抽象代数的主要目标，推动了以讨论群、环、域为内容的抽象代数的发展，形成了群论、环论、域论等抽象代数的许多分支。

四、抽象代数的应用

现在群论应用几何学中，应用于基本粒子的分类，许多基本粒子在被发现之前，科学家就是靠群论，其对称性可预言何样的基本粒子一定存在。核结构的研究，原子结构和分子结构的阐明。量子化学中的计算，都离不开群论，都是群与对称性相联系的。自然界最明显的对称性出现在结晶学中，结晶学是群论获得最优先应用的学科。

群论还渗透到诸如数论几何学、拓扑学、泛函分析及其他许多数学分支中而起着重要的作用，还形成了一些新学科如代数数论、代数拓扑、拓扑群李群、代数群、算术群等。抽象代数在结晶学、理论物理、量子化学以至（代数）编码学、自动机理论等方面，都有重要的应用。作为推广"群"的概念的产物：半群（只满足G_1）和幺半群（只满足G_1和G_2）理论及其近年来对计算机科学和对算子理论的应用，也有很大的发展。群论的计算机方法和程序的研究，已在迅速地发展。

第八章　复变函数

函数论是数学研究中的一个十分重要的领域。其中包括两大分支，一是实变函数论（研究以实数作为自变量的函数）；另一是复变函数论（研究以复数作为自变量的函数）。本章主要介绍一下复变函数论。

一、复变函数的基本涵义

复数起源于求代数方程的根。在二次、三次代数方程求根的公式中就出现了形为 $a+b\sqrt{-1}$ 的一类数，其中 a、b 是实数，$\sqrt{-1}$ 称虚数。人们习惯以 i 表示 $\sqrt{-1}$，并且称 $a+bi$ 为复数。

在函数中如果以复数作为自变量，则这类函数就叫做复变函数。复变函数论主要研究复数域上的解析函数，解析函数是复变函数中的一类具有解析性质的函数。因此，复变函数论也叫作解析函数论。

在复变函数论中，把在 Z_0 点的某一领域之内的一切点都具有导数的那种函数叫作在 Z_0 点解析的函数。

从函数的一般定义出发，如果存在一种规律，使我们根据已经给出的复数值 Z，可以算出复数值 W，我们就说 W 是复数 Z 的函数。

对于每一复数 $Z=X+yi$ 可以用平面 xoy 上的点 (x, y) 来表示，对于数 $w=u+vi$ 就用 uov（函数平面）上的点来表示。于是从几何的观点看，复数函数

$$w=f(z)$$

在变数平面 xoy 上的点和函数平面 uov 上的点之间建立了一个对应关系，即复变函数给变数平面到函数平面上建立了一个映

象。由于给定一个复变数函数和给定两个实变函数（见图 8-1）

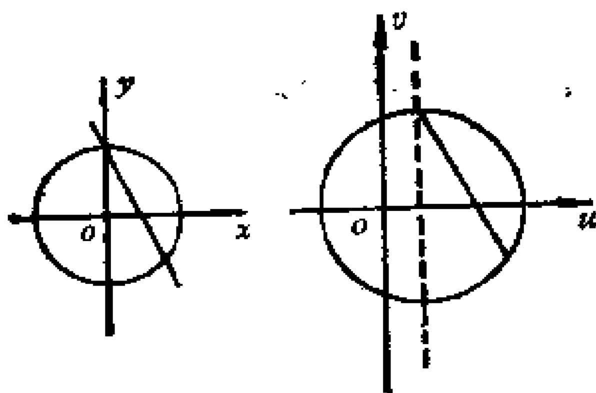


图 8-1

$u=\varphi(x,y)$，$v=\varphi(x,y)$ 是等价的，显然有

$w=u+vi=\varphi(x,y)+\varphi(x,y)i$。

比如说，假设

$w=z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi-y^2$，

那么

$$u=\varphi(x,y)=x^2-y^2,\quad v=\varphi(x,y)=2xy.$$

二、复变函数的产生和发展简史

复数概念早在 16 世纪已经出现，但对复数的全面掌握和广泛运用，却迟至 18 世纪。三、四十年代，欧拉就已经利用幂级数详细讨论过初等复变函数的性质。1777 年 3 月，欧拉向彼得堡科学院提交一篇论文。论文中考虑了复变函数的积分 $\int f(z)dz$，其中 $f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

比欧拉更早，达朗贝尔在 1752 年关于流体力学的论文中已经得到这两个方程。故有的教科书称这两个方程为达朗贝尔-欧拉方程。

到了 19 世纪，上述两个方程由柯西和黎曼在研究流体力学的时候，对它作了更详细的研究，所以这两个方程更多的是被叫做柯西-黎曼条件，或柯西-黎曼方程，并且用柯西、黎曼的英文字头（C、R）简写成"C-R"条件。

拉普拉斯也考虑过复变函数的积分，他和欧拉，达朗贝尔是复变函数论的先驱。

复变函数论的全面发展是在 19 世纪。柯西、黎曼、维尔斯特拉斯三位大数学家作了奠基性的工作。

1825 年，柯西在《论虚限定积分》中讨论了定积分

$$\int_{X+iY}^{X+i\overline{Y}} f(z)\mathrm{d}z$$

并且在 1831 年推出了以柯西名字命名的著名积分公式：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t. \quad (2)$$

其中 C 是区域 D 上的边界，而 Z 是 D 内的任意一点。他在此基础上建立了一整套复变函数的微分、积分理论。

黎曼 1851 年的论文奠定了复变函数论的基础，他推广单值解析函数到多值解析函数。引入黎曼曲面的重要概念。确立了复变函数的几何理论基础。他得到黎曼–罗赫定理。对后来的发展具有深远的影响。黎曼还对保角映射，椭圆函数论、多周期函数，以及偏微分方程、数论等方面都作出了开创性的贡献。

维尔斯特拉斯和柯西、黎曼完全不同，他彻底摆脱了几何直观，以幂级数为工具，定义解析函数是可以展开成幂级数的函数，围绕奇点来研究复变函数的性质，他在解析开拓和椭圆函数论方面也有很重要的贡献。椭圆函数论是和复变函数的基础理论平行地发展起来的。

近几十年来，复变函数论又有了很大的进展，维尔斯特拉斯的学生，瑞典数学家列夫勒（Gösta Mittag-Leffler，1846～1927）、法国数学家庞加莱、阿达马（Jacques-Salomon Hadamard，1865～1963）都做了大量的研究工作，开拓了复变函数的更广阔的领域，为这门学科的发展做了大量工作。

近年来，我国数学家杨乐、张广厚在单复变函数的值的分布理论和渐近值理论的研究中取得了具有世界水平的成果，他们的研究进一步充实了复变函数论的理论。

三、复变函数论的基本内容

对复变函数的研究，可以分为单复变函数论和多复变函数论。所谓单复变函数论主要讨论的是定义在复数平面上的函数的

性质。所谓多复变函数论主要讨论的是在多变量空间中的函数的性质。

复变函数论主要包括单值解析函数理论，黎曼曲面理论，几何函数论，留数理论，广义解析函数论，多复变函数论诸方面的内容。下面扼要分别加以介绍。

1. 单值解析函数理论

解析函数是复变函数研究的主要对象。什么是解析函数呢？如果函数$f(z)$在Z_0及Z_0的邻域内处处可导，那么称$f(z)$在z_0解析。如果$f(z)$在区域D内每一点解析，那么称$f(z)$在D内解析，或称$f(z)$是D内的一个解析函数。如果$f(z)$在Z_0不解析，则称Z_0为$f(z)$的奇点。

如果变量取一定数值的时候，函数就有一个唯一确定的值，这个函数就叫做单值解析函数。例如，多项式就是这样的函数。

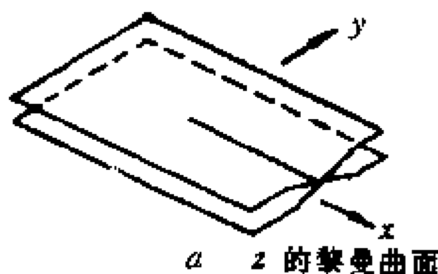
判定一个复变函数是否解析的问题等价于判定该函数是否满足柯西-黎曼条件（c-R条件）。这方面的内容以及解析函数的积分在前面均有所涉及，不再赘述。

解析函数有一些重要性质，特别是与调和函数之间有密切关系，这在理论和实际问题中都有着广泛的应用。

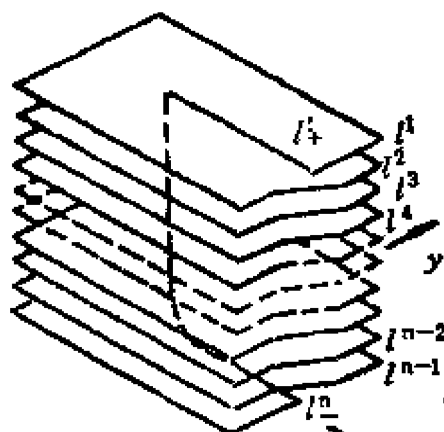
2. 黎曼曲面理论

复变函数也研究多值函数。函数也可以是多值的。比如，$W=\sqrt{Z}$，当$Z=1$时，函数值就可以是$+1$或者-1。黎曼曲面理论是研究多值函数的工具。黎曼为了给多值解析函数设想一个单值的定义域而提出一种曲面概念。用现代的语言说，黎曼曲面就是连通的一维复流形，我们知道，单值解析函数的反函数可以是多值的。例如，幂函数和指数函数的反函数为根式函数和对数函数。它们都是多值的。另外，从一个解析函数元素出发沿一个闭曲线作解析开拓，最后可能得到不同的元素。因此，完全解析函数往往是多值的。在研究多值函数时，人们先把它分解为一个个单值解析分支，然后按这些分支之间的关系把它们连接起来，好象许多层平面（常常叫作叶片）安放在一起而构成的一种曲

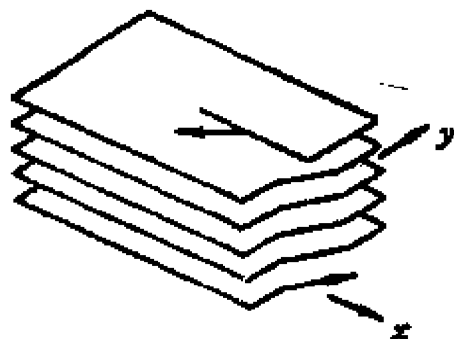
面。$\sqrt{Z}$，$\sqrt[n]{Z}$，$\ln Z$ 的黎曼曲面如图所示。利用这种曲面，可以使多值函数的单值分枝和枝点概念在几何上有个明显而直观的表示和说明。对于某一个多值函数，如果能做出它的黎曼曲面，那么，函数在黎曼曲面上就变成单值函数。黎曼曲面理论是复变函数和几何间的一座桥梁，能够使我们把比较深奥的函数的解析性质和几何联系起来。黎曼曲面与多复变函数论、复流形、代数几何、代数数论、自守函数等有密切联系。近数十年来，关于黎曼曲面的研究还对另一门数学分支学科拓扑学有较大影响，逐渐地趋向于探讨它的拓扑性质。



a　$\sqrt{z}$ 的黎曼曲面



b $\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面 l_+ 和 l^n 粘在一起，垂直的虚线实际是一个点



c $\ln z$ 的黎曼曲面

3．共形映射理论（又称保角变换理论）

复变函数可以通过共形映射理论为它的性质提供几何说明。什么是共形映射呢？就平面上映射来说，设$W=f(z)$是区域D内的解析函数，它把Z平面上区域D映射到W平面内。如果在这种映射下，通过D内任何一点的任意两条光滑曲线，它们的交角大小和方向都保持不变，那么就把这个映射$W=f(z)$叫做共形映射。导数处处不为零的解析函数所实现的映射就是共形映射。共形映射也叫保角变换或保角映射。

共形映射在流体力学，空气动力学，弹性理论，静电场理论等方面都得到了广泛的应用。共形映射本身就是从流体力学和几

何学的研究中产生出来的。

复变函数论中的这部分用几何方法来说明，解决问题的内容，一般又叫做几何函数论。

4．留数理论

留数理论是复变函数论中一个重要的理论。留数也叫做残数，它的定义比较复杂，这里只能简单地解释一下它的概念。如果$Z=a$是$f(z)$的孤立奇点，那么$f(z)/2\pi i$沿圆心在a的小圆周的积分就叫做$f(z)$在a点的留数。

应用留数理论使某些复变函数积分的计算十分方便。某些实变函数的积分，可以化为复变函数沿闭回路曲线的积分，再用留数基本定理化为被积分函数在闭回路曲线内部孤立奇点上求留数的计算，当奇点是极点时，计算更加简便，还可以用它将整函数展开为无穷乘积。它对稳定性理论、渐近估计等分支亦有影响。

5．广义解析函数论

把单值解析函数的一些条件适当加以改变和补充，以满足实际研究工作的需要，这种经过改变的解析函数叫做广义解析函数，广义解析函数所代表的几何图形的变化叫做拟保角变换。

解析函数的一些基本性质，只要稍加改变以后，同样适用于广义解析函数。

广义解析函数的应用范围很广泛，不但应用在流体力学的研究方面，而且像薄壳理论这样的固体力学部门也有应用，因此近年来这方面的理论发展十分迅速。

以上讲的，都是经典的单复变函数的基本内容。

6．多复变函数论

多复变函数论是研究多个复变量的解析函数的性质和结构的分支学科，有时也称多复分析。它在研究的重点和方法上，都和单复变函数论有显著的区别。因为多复变函数的性质在很大程度上由定义区域的几何和拓扑性质所制约，因此，其研究的重点经历了一个由局部性质到整体性质的逐步转移。它广泛地使用着微分几何、代数几何、拓扑学、微分方程等的概念和方法，不断地开

辟新的领域。

20世纪初，庞加莱、库辛、哈托格斯等人的工作，揭示了多复变解析函数本质上的独特性。在这当中，库辛提出的关于解析函数整体性质的两个以他的名字命名的问题，列维提出的拟凸域和正则域是否等价的问题，更有深远的影响，成为多复变函数发展的一个推动因素。20世纪30年代，多复变函数研究的初步繁荣，出现嘉当（Henri Cartan1904～ ，法国数学家）关于解析自同构的唯一性定理，有界域解析自同构群的李群性质以及正则域与正则凸的等价性的嘉当-图伦定理等突出成果。特别是从1936年开始，日本数学家冈洁对库辛问题、列维问题、逼近问题等多复变函数的中心问题进行了系统研究，于50年代对上述问题给出了解答，对多复变的发展有着重大的影响50年代后多复变函数论出现用拓扑方法和几何方法研究解析函数的整体性质的趋势，勒雷引进的层和上同调概念与嘉当的解析函数理想理论以及同冈洁的思想相结合，导致了凝聚解析层理论的建立。与此同时，复空间和施泰因流形的概念也应运而生。60年代，微分几何与复分析相结合，产生了复流形，成为多复分析的一个有力工具。近年来，多复变函数论的研究更多地偏向于复几何及与数学物理有关的一些问题。

四、复变函数的应用

复变函数论在应用方面，涉及面很广，有很多复杂的计算都用它来解决。比如物理学上有很多不同的稳定平面场，所谓场就是每点对应有物理量（温度、速度、电势等）的一个区域，对它们的计算就是通过复变函数的理论来解决的。

比较典型的应用例子，是俄国儒可夫斯基（Николай Егорович Жуковский，1847～1921）的研究，他以著名的儒可夫斯基函数$W=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Z}+Z\right)$为出发点，成功地解决了飞机机翼的结构

问题。在流体力学和航空动力学方面，他运用复变函数论也作出了贡献。

复变函数论不但在其它学科得到广泛的应用，而且在数学领域里，许多分支也都应用它的理论，它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对它们的发展有很大影响。

第九章 泛函分析

泛函分析是现代数学中的一个较新的重要分支，它起源于数学物理中的变分问题和积分方程理论，概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题和成果，又受到量子物理学、现代工程技术和现代力学的有力刺激。它综合地运用分析的代数的和几何的观点和方法，研究分析数学，现代物理和工程技术提出的许多问题。现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学、理论物理及现代技术理论的许多分支，如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理学、抽象调和分析、理代控制、大范围激分几何等方面，泛函分析对纯粹数学的影响以及对应数学的影响，好像本世纪初叶集合论对后来数学的影响那样，同时泛函分析本身也不断地深入发展。

一、泛函分析的产生

19世纪以来，数学的发展进入了新的阶段。这就是，由于对欧几里得平行公理的研究，引出了非欧几何这门新的学科；对于代数方程求解的一般考察，最后建立并发展了群的理论；对数学分析的研究又建立了集合论。这些新的理论都为用统一的观点把古典分析的基本概念一般化准备了条件。

泛函分析起源于对变分法的研究，变分法的核心是研究形如$J[y]=\int_a^b F(x, y, y')dx$（或更复杂)的积分的极值。这里函数$y=y(x)$是在某个集合$Y$点上变动，例如$Y$可以是$[b,a]$上具有连续$f(x)$，那么变分法就是研究以函数$y$为自变元的函数导函数的函数的全体。如果说微积分是研究以数x为自变元的函数$J[y]$，函数y在这里被视为“点”，y上的全体函数y则被视为一个空间，

称为函数空间。19 世纪末，法国数学家阿达马首先给这种函数的函数$J[y]$冠以"泛函"的名称。在泛函 $J[y]$ 的极值研究中，需要考察与一个函数 y_0 相"邻近"的一切函数，这就向人们暗示：Y 中的函数("点")与函数（"点"）之间有着某种衡量远近的几何度量，从而Y是具有某种度量的、由函数（"点"）构成的"空间"。但是，数学家们认识到这一点，是经过了长期的历史过程的。

泛函分析还起源于对积分方程的研究，1900年瑞典数学家弗雷德霍姆（Erik Ivar Fredholm，1866～1927）对积分方程 $Q(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)Q(y)\mathrm{d}y=f(x)$作了重要研究。1906 年，希尔伯特也对此进行了深入研究，他在实连结积分核 $k(x, y)$ 是对称的（即$k(x, y)=k(y,x)$)的条件下，获得许多比弗雷德霍姆更深入的结果。他证明特征值是实的，给出预解式的形式与特征展开等等，这些通常称为希尔伯特谱论。希尔伯特利用正交展开将积分方程求解问题化成无限阶的线性方程组求解问题，并在此基础上引入无限维（实）欧几里得空间 l^2，即满足$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2<\infty$的实数列$a=(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots)$ 全体。把空间l^2看作是欧几里得空间向无限维的推广，称希尔伯特空间，它有效地解决了一类积分方程求解及其本征展开的问题。1907年，施密特把希尔伯特研究积分方程时使函数等同于富氏系数集的思想，抽象为一般的 l^2空间，并导出正交系。希尔伯特空间的名称由此产生。20世纪30年代，希尔伯特空间的研究已取得丰富的成果，是被用来描述量子物理的基本工具之一，也核应用于数学和物理的各个分支中。

分析数学中许多新部门的形成，揭示出分析代数、几何的许多概念和方法常常存在许多相似的地方，比如，代数方程的求极和微分方程求解都可以应用逐次逼近法，并且存在性和唯一性条件也极其相似；线性常微分方程论、线性差分方程论和线性代数方程理论也十分相似。这种相似在积分论中表现得更为突出。泛函

分析的产生正是和这种情况有关。有些初看起来很不相干的东西，都存在着类似的地方，因此它启发人们从这些类似的东西中探索一般的真正属于本质的方面。

非欧几何学的确立拓广了人们对空间的认识，n维空间几何的产生允许我们把多变数函数用几何学的语言解释成多维空间的映射。这样，就显示出了分析和几何之间的相似的地方，同时存在着把分析几何化的一种可能性。这种可能性要求把几何概念作进一步的推广，最后把欧氏空间扩充为无穷维数的空间。

函数概念这时候也有了更为一般的意义。古典分析中的函数概念是指两个数集之间所建立的一种对应关系。现代数学的发展却要求建立起两个任意集合之间的某种对应关系。比如：

$Y=\{\bar{y}\}$ 是n维矢量集，

$X=\{x\}$ 是实数集，

那么，$\bar{y}=f(x)$建立了实数集X到n维矢量集Y之间的一种对应关系。

再举例来说，积分方程论中研究如下的积分式：

$$y(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)dt,$$

其中，$k(s,\ t)$ 是定义在正方形域 $a\leqslant s,\ t\leqslant b$ 内的连续函数，这样，积分式就可以看成一个对应法则，根据这个法则，对$[a,\ b]$上每个连续的函数$x(t)$，可使在同一闭区间上连续的另一函数$y(s)$和它对应，这里建立的是两个连续数函集合之间的对应关系。

一般地说，给定任意两个连续函数集合X和Y，并给定一个法则f，假如对每一个元素$x\in X$，根据这个法则可以使唯一确定的元素$y\in Y$和它相对应，我们就说，在集X上定义了一个抽象函数或者算子$y=f(x)$，它的值域包含在Y内，特别地，例如算子的值是实数，我们就把这个算子叫做泛函数。算子也叫算符。在数学上，把无限维空间到无限维空的变换叫做算子。1926～1932年冯·诺值曼关于希尔伯特空间上对称算子的研究，取得较大成就，确立了算子理论。

研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论，导致了一门新的分析数学的产生，叫做泛函分析。在本世纪30年代，泛函分析就已成为数学中一门独立的学科。

总之，泛函分析的产生，是由于分析学中许多新部门的形成，从而发现在代数、几何、分析中不同领域之间的某些方面的类似。泛函分析在产生过程中还受到实变函数论以及近世代数的概念和方法的影响。

二、泛函分析的基本内容

泛函分析综合运用分析的、代数的、几何的观点来研究无限维向量空间（如函数空间）上的函数（也称泛函），算子和极限理论。主要内容有：拓扑线性空间（特别是巴拿赫空间，希尔伯特空间）及其算子理论、广义函数论、非线性泛函分析等。

一般说来，线性泛函分析比起非线性泛函分析要成熟得多，也更基本些。这是因为线性问题总是比非线性问题容易研究得多，因而迄今所获得的成果也就要丰富得多。由于非线性问题比较困难，人们大都是先做一次近似，把它线性化，然后再用线性方法去解决。下面以线性泛函分析为主，非线性泛函为辅加以说明。

1. 线性泛函分析以及算子

线性泛函分析主要是讨论有关线性算子——线性泛函是它的特殊情况——以及更加复杂的算子空间、算子代数的一些问题，如谱理论和表示理论等。线性算子是线性空间到线性空间的一种线性映照。正如同研究函数时必需研究直线上的点集一样，为了研究算子，我们必须首先讨论算子的定义域——无限维空间的结构，特别是描述有关极限（拓扑）概念的一些理论，如微分、积分理论。因此泛函分析也可以通俗地叫做无穷维空间的几何学和微积分学。

至于古典分析中的基本方法，也就是用线性的对象去逼近非线性的对象，完全可以运用到泛函分析这门学科中去。

2. 广义函数论

广义函数论是泛函分析中具有广泛应用的一个重要分支。30年代开始，很多数学家研究微分方程的"弱解"，这自然地导致广义导(函)数概念。应注意的是点点不连续的函数可能有广义导数而仅在一点不连续的函数却可能没有广义导数。对于一个具体的微分方程，所需的广义导数可以容纳在当时已形成的巴拿赫空间（即赋有"长度"的线性空间）理论的框架之内。物理学家在量子力学时，曾经引入了所谓"δ函数"：

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & \text{当}x=0\text{的时候,}\\ 0 & \text{当}x\neq 0\text{的时候,}\end{cases}$$

而且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

从这个函数我们可以直观地想象 δ（x）的图形，只是在x=0附近的一个小范围内，这个函数不是0，而且在小范围内，这个函数值很大，以至它在这个范围的积分是1。

按照函数的通用定义，要求一个函数在它的范围内每一点上都有一个确定的值。在这个意义下，δ（x）就不能叫作一个函数，而是更具有一般性的某种东西，我们不妨把它叫做一个"非正规函数"，以指出它不同于通常意义下的函数。由于δ（x）函数的引入，导致了广义函数的研究，促进了泛函分析向着新的方向发展。

广义函数同样也存在微分与积分的研究。特别是，它一出现就强有力地推动偏微分方程的发展。例如，50年代末出现赫尔曼德尔的叶理论，紧接着60年代又出现了伪微分算子理论和傅立叶算子理论。从此，偏微分方程的研究出现了新局面。

3. 拓扑线性空间

拓扑线性空间又称拓扑向量空间，它是具有拓扑结构的线性空间，赋范线性空间概念的推广，是泛函分析的一个重要分支。在弗雷歇（Maurice-RenëFrèchet，1878～1973，法国数学家）引

入距离，并用它来统一过去分析学中的许多重要收敛概念时，就知道[a、b]上一列函数的“点点收敛”概念是不能用距离来描述的。跨入30年代，泛函分析中大量使用弱收敛、弱拓扑。它们都不能用距离来描述，这就很自然地要把赋范线性空间理论发展成更一般的拓扑线性空间理论。这一分支的发展是与一般拓扑学的发展紧密联系在一起的。拓扑学方法在这里发挥了极重要的作用。从1935年后，经过10多年时间，这一分支终于形成，它的许多重要结果不仅仅在泛函分析中有广泛的应用，也为其他分析学的深入研究提供了基本框架和有力的工具。

4. 非线性泛函

从泛函分析的起源来说，变分法中所讨论的泛函$J[y]$就已经是非线性的了。就发展的现状来说，泛函分析中非线性理论还没有达到线性理论部分那样丰富多彩的结果。这很可能是由于线性分析与非线性问题有本质区别，而线性问题比非线性问题简单得多。对分析学各个领域中出现的各种形式的问题，只要本质上属于线性的问题，尽管是很复杂的问题，相对地说，人们是易于取得成功的。然而，在现实中非线性问题远比线性问题多。由于处理上的困难，不少非线性问题就用线性的近似来代替。随着认识的深入，线性问题的研究到了一定阶段，人们自然就向非线性问题的研究转移。线性泛函为非线性泛函的发展提供了前提。围绕着非线性积分方程，非线性积分微分方程以及各种近似求解法等等，已经逐渐形成了在应用上具有一定广泛性的泛函分析的非线性理论。例如，近似解理论、单调算子理论、隐函数理论、拓扑度理论，分歧理论等。不久前，国家已把非线性科学（非线性泛函分析仅是其中一小部分）列为重大基础研究项目之一。随着近代微分几何、拓扑学和大范围分析的发展，今后非线性泛函分析定将有更广阔的前景。

三、泛函分析的应用

泛函分析是分析数学中“最年轻”的分支，它是古典分析观点

的推广，它综合函数论、几何和代数观点研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论，有着广泛的应用。对数学物理方程、连续介质力学、量子物理学均有深刻影响，可以说是研究现代物理学的有力工具。n维空间可以用来描述具有n个自由度的力学系统的运动，但是，具有无穷多自由度的力学系统，就需要有新的数学工具来描述。这个新工具就是泛函分析。比如，梁的振动问题就是无穷多自由度力学系统的例子。一般来说，从质点力学过渡到连续介质力学，就要由有穷自由度系统过渡到无穷自由度系统。现代物理学中的量子场论就属于无穷自由度系统。在量子力学中，体系的状态用希尔伯特空间的向量来描述。象能量、冲量、运动的振动矩这类物理量需借助于泛函分析中的自共轭运算子来研究，对量子力学有关的数学问题的研究，已成为泛函分析发展的基本方向之一。

近十几年来，泛函分析在工程技术方面也获得了更为有效的应用。

对于数学的各个分支，泛函分析也有重要作用。如对偏微分方程，计算数学、概率论等的影响就是明证。

不过，尽管有了上述诸多应用，但把泛函分析理论用到解决经典分析的大问题上却很少有成效。这一失败使泛函分析的奠基者们的希望落空了。

第十章　概率论和数理统计

概率论和数理统计是研究随机现象规律的数学，它发展迅速，应用广泛，是一门具有强大的生命力的应用数学。

一、概率论

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。

1．概率论的产生

客观世界有许多必然事件。这种事件的特点是：物质运动由其内在的根本矛盾所决定，它决定了运动的基本性质，这种事物的变化都服从确定的因果联系，从前一时刻的运动状态可以推断以后各个时刻的运动状态。有相当一部份这类事件在数学上可以用各种微分方程来描述。如行星绕日运动就是遵循力学定律的一种必然事件，采用常微分方程的确定性数学模型就可予以描述。热量从温度高处向温度低处转移，这种热传导的必然事件，涉及多个未知变量，可以采用偏微分方程的确定性数学模型。在标准大气压下，水加热到100℃，就必然会沸腾。把铁加热到1530℃的时候，必然会熔化成液态。事物间这种联系具有必然性的。通常的自然科学就是专门研究这种必然性，寻求这类必然现象的因果关系，把握它们之间的数量规律，以达到认识世界和改造世界。

但是，客观世界是复杂的，是一幅由多个因素相互联系、相互作用交织起来的图景，并不存在着绝对必然的东西。在微分方程描述的那种周而复始、始终如一的运动规律中，实际上已经直接或间接地包括了对许多偶然性因素的数学处理。当由于偶然因素的直接影响，对象的发展出现多种不同的随机可能性时，通过列出微分方程来加以描述的方法就极为困难了。这就推动了数学

家对偶然事件的研究，导致概率论的产生。随机现象是指这样的客观现象，当人们观察它时，所得的结果不能预先确定，而只是多种可能结果的一种，如在同样条件下，进行小麦品种的人工催芽试验，各颗种子的发芽情况并不相同，有强弱和早晚之别等等。这是受偶然因素的影响，可能出现种种不同的结果这种现象叫随机现象。

早期概率论的研究与赌博的数学研究相关。1654年有一个赌徒梅累向当时的数学家帕斯卡（Blaise Pascal，1623～1662）提出一个使他苦恼了很久的问题："两个赌徒相约赌若干局，谁先赢m局就算获胜，全部赌本就归胜者。但是，当其中一个人赢了a（$a<m$）局，另一个赢了b（$b<m$）局的时候，赌博中止。问：赌本应当如何分法才合理？"三年后，也就是1657年，荷兰著名的天文学家、物理学家兼数学家惠更斯（Christiaan Huygens 1629～1695年）企图解决这一问题。他用排列组合的方法，研究了一些复杂的赌博问题，结果写成了《论机会游戏的计算》一书，这就是最早的概率论著作。17世纪中叶，法国数学家帕斯卡和费马等人就开始研究机遇博奕的数学理论。18世纪保险事业的发展进一步推动了概率论的研究。后来又把它推广运用于社会统计、天文、大地测量的误差计算和流体动力学、热力学与统计物理学的研究。到19世纪初才形成了比较完整的概率理论。数学家拉普拉斯对概率论的发展贡献很大。他在系统总结前人工作的基础上，写出了《概率的分析理论》（1812年出版）。他首次明确规定了概率的古典定义（即古典概率），并在概率论中引入了更有力的分析工具，如差分方程、母函数等，从而实现了概率论由单纯的组合计算到分析方法的过渡，将概率论推向一个新的发展阶段。1901年，李亚普诺夫（Апександр Мих айпович папунов 1857～1918）利用特征函数方法，对一类相当广泛的独立随机变量序列，证明了中心极限定理。他还利用这一定理第一次科学地解释了为什么实际中遇到的许多随机变量近似地服从正态分布。直到20世纪初，人们才逐步建立了概率的公理系统。概率论运用概率、

随机过程等概念，描述了经典数学无法把握的随机性，从中寻找确定的统计规律。概率论标志着数学研究从确定性事件领域深入到不确定性事件领域。

2. 概率论的内容

概率论从数量的角度来研究大量的随机现象，从中寻找这些随机现象所服从的统计规律，并用严格的数学方法研究各种随机现象的统计规律之间的相互联系。

一方面，从对客观存在的大量随机现象的观察，可以总结出统计规律性。例如，到颐和园来游览这件事，今天究竟是谁到颐和园来，完全是随机的，有的因闲着无事偶然到公园逛一逛；有的因外地来亲戚朋友，陪伴一块来玩；有的相约在公园见面等等，这些事件都是随机的。每天都有大量的随机现象。对这大量随机现象进行统计，就可以找出一年四季游览颐和园的概率分布规律，春天游客最多，夏天秋天游客也较多，冬天游客稀少，这样就可以主动做好服务工作。

另一方面，为考察某一事物，在同样条件下进行大量的重复试验，从所得到的大量试验结果，也可分析出一定的统计规律性。例如，把一枚硬币抛掷大量次数以后，就会发现一定的规律性，即出现文字和图案的概率都是1/2。又如，掷骰子，总共有6个可能的结果，它们出现的可能性相等。因此，我们说某一面出现的概率为1/6。用A表示一随机事件，即记号$P\{A\}$表示"随机事件A的概率"，它是一个0、1之间的数值：

$$P\left\{A\right\}=\frac{m}{n},$$

此处n表示可能结果的总数，m表示所有可能结果中A发生的个数。

概率也叫做"几率"、"或然率"，是概率论中最基本的概念。概率是用来表示随机事件发生的可能性大小的一个量，它具有下述三条最基本的性质：

(1) 任何事件A的概率$P\{A\}$总是介于0与1之间，$0\leqslant P\{A\}\leqslant 1$。

(2) 必然事件A的概率等于1，即$P\{A\}=1$。如水加热到100℃时就沸腾，这是必然事件，它的概率等于1。

(3) 如果事件A_1，A_2，……中任何两个都不能同时发生，则它们中至少有一个发生的概率等于诸Ai的概率之和，即

$$P\left\{A_1+A_2+\cdots\cdots\right\}=P\left\{A_1\right\}+P\left\{A_2\right\}+\cdots\cdots$$

概率论的主要问题是说明大量的偶然因素相互影响而产生的规律。为了研究大量的随机现象，一般总是将有限转化为无限，也就是采用极限的方法，这就引导到极限定理的研究。极限定理的内容很广泛，其中最重要的是大数定律和说明分布的正态规律起重大作用的中心极限定理。

大数定律说明了随机现象大量观察结果的平均值具有稳定性。即如果影响某一随机现象的随机因素很多，在大量试验下，个别因素的影响也将相互抵消，而使总体具有稳定性。例如，虽然每个气体分子的运动带有一定的随机性，但是作为气体平均特征的压力、温度等是稳定的，气体分子的动能的平均值是一个常数。所以，大数定律揭示了大量随机变量的和在一定条件下具有某种稳定性，这是一个重要的规律。但是它并没有涉及到随机变量的分布。因此，概率论中还有一个重要的中心极限定理。

中心极限定理是指用来阐明随机变量的和的极限分布是正态分布的一系列定理。每一随机变量都遵循着一种确定的分布规律，如果随机变量是连续的，那么其分布规律可用一个称为密度函数的曲线来刻画，正态分布就是一种连续分布，它的密度曲线（见图10-1）的特征是：可以表示成1条钟形曲线，有一个最高点，在这点两边对称地下降。

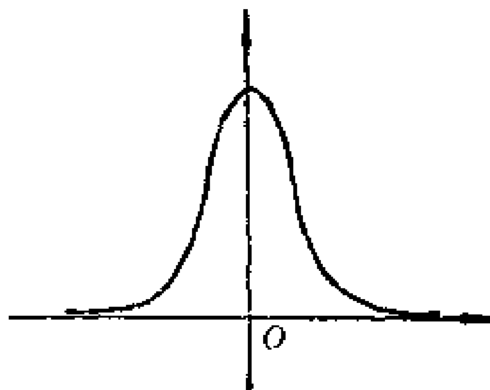


图 10-1

在现实生活中，有许多随机变量是由大量相对独立的随机因素影响所形成，而其中每一个别

因素，在总的影响中所起的作用都是很小的。这种随机变量往往近似地服从正态分布，这种现象就是中心极限定理的客观背景。例如人的某些生理特征(身高、体重等)；测量的误差；农作物的收获量；炮弹的着落点等等，都是服从正态分布的随机变量。

在射击理论和误差理论中，正态分布都起着特别重要的作用。这是因为射击的偏差和测量的误差都被认为是服从正态分布的。如测量的误差，由于在测量过程中，不可避免地有许多产生测量误差的因素，如温度，湿度，大气压力，人的心理状态，……，这些个别微小的因素对总的测量结果的影响是很微小的，甚至是感觉不到的。但是把这些微小的影响累积起来，对总的测量结果就有明显的影响。若用随机变量来描述的话，那就是可以把测量的误差看作为一个随机变量ξ，并且它是许多取值很微小，而又相互独立的随机变量的总和，即$\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\cdots\cdots+\xi_n$。如果所有个别因素对总和所引起的影响都很微小，那末测量的误差——随机变量ξ的极限分布一定是正态分布。中心极限理论从理论上证明了上述实践经验的事实在一般条件下是正确的。

马尔可夫过程是概率论研究的一个重要内容。马尔可夫过程又叫作无后效的随机过程。它是一种常见的，重要的随机过程。它的特点是，若现在的情况已经知道，则以后的一切统计特性就和过去的状况无关。马尔可夫过程可以按照时间和状态的离散、连续情况分作 3 个部分来深入讨论。20世纪50年代以前，研究马尔可夫过程的主要工具是微分方程和分析方法。近年来，鞅论方法（鞅是另一类重要的随机过程）也已渗透到马尔可夫过程的研究中，它与随机微分方程结合在一起，已成为目前处理多维扩散过程的工具。此外，马尔可夫过程的研究，推动了位势理论的发展，并为研究偏微分方程提供了概率论的方法。最近十多年发展起来的吉布斯随机场和无穷粒子随机系统，是由于统计物理的需要而提出的。

平稳随机过程也是概率论的重要研究内容，它是一种其统计特性不随时间的推移而变化的过程。一般来说，当产生随机现象

的一切主要条件可以看作不随时间的推移而改变的时候，我们常把它看作是平稳的。在实际应用中，如通信技术、造船、气象、纺织等所遇到的过程有很多可以认为是平稳过程，因此，平稳过程的理论研究很重要，平稳过程在自动控制、无线电电子学等方面都有重要的应用。

3．概率论的应用

在物理学方面，高能电子或核子穿过吸收体时，产生级联（或倍增）现象。在研究电子——光子级联过程的起伏问题时，要用到随机过程。人们常以泊松过程、弗瑞过程作为实际级联的近似，有时还要用到更新过程的概念。当核子穿到吸收体的某一深度时，可用扩散方程来计算核子的概率分布。物理学中的放射性衰变、粒子计数器、原子核照相乳胶中的径迹理论和原子核反应堆中的问题的研究，都要用到泊松过程和更新理论。湍流理论以及天文学中的星云密度起伏、辐射传递等研究要用随机场的理论。探讨太阳黑子的规律及其预测时，时间序列方法非常有用。

化学反应动力学中，研究化学反应的时变率及影响这些时变率的因素问题，自动催化反应，单分子反应，双分子反应及一些连锁反应的动力学模型，都要以马尔可夫过程来描述。

随机过程理论所提供的方法对于生物数学具有很大的重要性，许多研究工作者以此来构造生物的模型。研究群体的增长问题时，提出了生灭型随机模型，两性增长模型，群体间竞争与生尅模型，群体迁移模型，增长过程的扩散模型等等。有些生物现象还可以用时间序列模型来进行预报。传染病流行问题要用到具有有限个状态的多变量非线性生灭过程。在遗传问题中，着重研究群体经过多少代遗传后，进入某一面定类和首次进入此面定类的时间，以及最大基因频率的分布等。

在系统科学方面，研究大量元素组成的具有大量自由度的复杂系统的时候，由于系统的元素数量庞大，便呈现出复杂的随机运动。相邻元素之间、元素和整体之间都缺少面定的联系，微积分是难以描述这种系统的，只有用概率论，才能揭示复杂系统的层

次之间的联系和大量元素的随机运动的平均统计规律性。信息论创始人申农提出度量信息量的数学公式，把消息看作随机序列。把这种离散信息源看作概率论的"马尔科夫过程"，认为信息源是根据已知的（或某种意义上可知的）概率从各种可能的消息中选择消息发出去。他用马尔科夫过程的统计特性即它的"熵"来表征信息源的特性，将它定义为该信息源发送的每个消息（符号）的平均信息量，等于该符号出现的概率的对数乘以其概率本身再求和。控制论创始人维纳研制高射炮的自动控制问题。高炮控制要求高速度的计算，以便预测飞机的飞行方向和速度，从而，做出判断，迅速对炮位、方向以及角度并加以调节与操纵。他认为只有采用概率统计这样的数学工具，飞行曲线的预测问题才能解决。

许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、机器损修、病人候诊、红绿灯变换、存货控制、水库调度，购货排队。等等，都可用一类概率模型来描述。这类概率模型涉及的过程叫排队过程。

概率论还渗透到其他科学领域。在纯数学领域内用概率论方法研究数论问题已经有很好的结果。在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，也大量采用概率论方法。正如拉普拉斯所说："生活中最重要的问题的绝大多数在实质上只是概率的问题"。

二、数理统计学

运用概率论来研究自然界和社会中的大量随机现象的统计规律性，并利用观察的资料来对随机变量的数学特征，分布函数等进行估计、分析和推断，这样的一门科学就是数理统计学。

1. 数理统计的产生

从数学上对生物统计进行研究的第一个人，是英国的皮尔逊（Karl Pearson，1857～1936)。他在伦敦大学学习过，1882年任伦敦大学学院的应用数学力学教授。1891年他和剑桥大学的动物学家讨论达尔文自然选择理论，发现他们在区分物种时间的数

据有"好"和"比较好"的说法。于是皮尔逊潜心研究数据的分布理论。在"机遇的法则"一文中，他提出了概率和相关的概念．接着又提出标准差、正态曲线、平均变差、均方根误差等一系列数理统计的基本术语。这些文章都发表在进化论的杂志上。直到1901年，他创办《生物统计学》杂志，才使数理统计有了自己的阵地。

英国统计学家费希尔（Ronald Aylmer Fisher，1890～1962），对现代数理统计的形成和发展作出了重大的贡献。他1912年毕业于剑桥大学，1919年他对生物统计学感兴趣，参加罗萨姆斯泰德试验站的工作，致力于数理统计在农业科学和遗传学中的应用。他将66年的施肥、田间试验和气候资料加以整理、归纳，从中提取信息，为他作理论研究打下基础。他是一些有重要理论和应用价值的统计分支和方法的开创者。其重要成就有：系统地发展了正态总体统计量的抽样分布（20年代），这标志着相关、回归分析和多元分析等分支的初步建立；建立了以最大似然估计为中心的点估计理论（1912～1925年）；他与耶茨合作创立了实验设计，并发展了与这种设计相适应的数据分析方法——方差分析法（本世纪20～30年代），这在实用上很重要。1928～1938年雷曼、皮尔逊等建立了假设检验的一种严格的数学理论，把假设检验问题作为一个数学最优化问题来处理。在一定意义上，这是瓦尔德建立统计决策理论的先驱。

英国是数理统计的发源地和研究中心。但从第二次世界大战开始，美国也发展得很快。在战争中，人们要研究飞机上某种投弹装置的效果。如果要用数学分析的方法列出连续向矩形阵地靶子投三颗炸弹的方程，不仅方程难列，计算也够复杂的，实际获得的结果很少。如果使用若干统计数据，综合投弹的概率模型，就很容易得出许多重要的信息。美国数理统计的研究颇有成效，哥伦比亚研究组在理论和实践上都有重大建树。其中最著名的是"序贯分析"，被称为"30年来最有威力的统计思想"。在1975～1976年出版的《现代统计学索引》一书中，序贯分析的文章有55

篇之多，至今它仍是统计学中的重要领域之一。

著名统计学家瓦尔德（Abraham Wald，1902～1950）是犹太人，后移居美国。他创立了序贯分析与决策函数理论，开创了统计学的新局面。"序贯分析"的产生是由于军方的需要。1942年底，美国科学研究发展局首脑韦弗给哥伦比亚大学应用数学研究组一项任务，要求对在海军中服务的斯凯勒的一项简化公式作出评价。这项公式原是英国来的，用来求出敌机一次射击恰巧击中并引炸我机携带炸弹的概率。哥伦比亚小组中的沃利斯和保尔森认为斯凯勒的公式不太好，提出了一个更简单的公式。斯凯勒认为这个公式虽好，但为了有较高的精密度需要很大的样本，而且需要实弹试验。这种好几千项的实弹试验实在太浪费了，能不能设想出一条比较节约的规则，使试验达到一定精密度时即自动停止呢？1943年春，他们就这个问题请教数理统计专家瓦尔德，瓦尔德提出了序贯分析法。在经典统计推断程序中，全部数据只影响最后的结论，至于用多少数据则是预先确定的。序贯分析不是这样，这里每收集一个数据都得考虑是否要停止观测以及对结论有何影响这样双重的问题。瓦尔德加上一条能判断是否需要停止的规则的数学描述，这一办法解决了沃利斯的问题，使他能用较少的试验得到化简公式，从而节约大量的弹药和试验费用。序贯分析在战后获得巨大发展。1950年瓦尔德创立了统计决策理论，也赢得了广泛的赞誉。它从人与大自然进行博奕的观点出发，企图把形形色色的统计问题归并在一个统一的模式之下，这种理论对战后数理统计各分支的发展产生较大影响。

电子计算机的广泛应用，促进了数理统计的发展。有了计算机，过去一些停留在理论上的方法得以付诸实用。如在涉及数十个自变量的大型回归问题中，有变量选择的问题。没有计算机时这类问题无法实现，现在有计算机就能实现。人们提出了很多选择标准并进行理论上的探讨，这丰富了回归分析分支的内容。通过计算机模拟，可以在实际应用中避开一些难于解决的、复杂的抽样分布描导问题。另外，计算机在短时间内处理大量数据的能

力，使人们有可能从各个角度对数据进行透彻的分析，从其中提出更多的信息，称为"数据分析"。

2. 数理统计的内容

数理统计包括抽样、适线问题、假设检验、方差分析、试验设计、统计决策等内容。

我们对一个研究对象进行调查或者试验的时候，虽然全面调查是最完善的，但是有很多研究对象不允许这样做，有时候这样做也不是必要的，特别是有许多调查和试验是带有破坏性的，全面调查和试验就更不可能了。比如，工业上要检查灯泡的耐用时间，就要把灯泡烧掉，如果全面试验就要把生产的灯泡都烧掉。又比如，农业上要在小麦没有成熟前估计产量，就要把小麦收来对它的株数、穗数、粒数、粒重进行计算，如果全面调查，就要把小麦全收割下来。这些都是不允许的。因此，调查只能用"抽查一部分"进行试验的方法。在数理统计中这种方法就叫作抽样，抽出的部分叫作子样或者叫作样本。被检查对象的全体相对于子样来说就叫做母样，也叫做总体。

抽样检查是要通过对子样的调查，来推断总体的全面情况。究竟抽多少合适，这是十分重要的。抽多了会浪费物资、人力和时间、抽少了代表性不大。因此，在抽样检查中就生了"小子样"理论，这是一种在子样很小的情况下，进行分析判断的理论。

适线问题也叫做曲线拟合。在实际中，有些问题需要根据积累的一些经验数据来求出理论分布曲线，从而获得整个问题的近似解。为此需要研究如下一些课题：根据什么原则求出理论分布曲线？有时候同一问题中可以求出几种不同的曲线，如何比较各种曲线的优劣？选配好曲线以后，又怎样判断它和理论分布的真值相差多少呢？这些问题，就属于数理统计中的适线问题。

假设检验是指在用数理统计方法检验产品的时候，先作出一种假设，叫做原假设。再根据抽样观察的结果在一定可靠程度上对原假设的可信性作出判断，决定接受或者拒绝原假设。这种方法就叫做假设检验。

方差分析也叫做离差分析。在工农业生产中，会遇到生产过程不稳定，但是找不出原因的情况，这样就需要进行试验来判断哪些因素在起作用。或者改变生产条件的时候，判断对产量质量影响比较大的是哪些因素。方差分析就是用分解样本离差平方和的方法对诸因素是否有明显的影响作出判断。

根据观察某些现象所得的一组资料，运用数学方法，确定现象的某些量之间相关程度的大小以及用怎样的函数关系相联系，叫做相关分析。

方差分析可以指出哪些因素有比较大的影响，哪些因素没有影响，但是不能指出某一因素的影响程度。相关分析的理论解决了这个问题，它不仅可以定性地指出哪些因素有密切的关系，而且可以定量地指出这些因素之间量的变化关系。

试验设计，顾名思义，就是研究如何科学地设计试验的一门统计学科。例如试制一种工业品，有几种原材料和设备可选用。生产的各种工艺因素如温度、压力、反应时间等，又可各有若干个可选用的水平。因此，全部可能的搭配数很多，要做试验次数很多，由于人力、物力、时间所限，只能挑选一部分去做试验。所挑的一部分要有代表性，并使得数据便于进行分析。试验设计得好，既可减少试验次数，缩短时间，节省物力，人力，又能得到好的结果。

统计决策将一个统计问题看作人与自然的一个博奕。人所采取行动的优劣，由其后果（以经济损失的形式表示来衡量，即所采取行动应使损失尽可能小，或反过来说，使收益尽可能大。但是，后果又依赖于自然的状态，因此，行动应依据样本带给我们的关于自然状态的信息。所以，一个统计决定是依样本而采取行动的一整套行动方案。统计决策理论则是研究如何选取这种行动方案的统计科学。例如，一个商店要决定今年内某种产品的进货数量。假定每积压一件产品损失20元，而少销售一件产品则损失10元，商店必须根据抽样调查所得到的关于销售量的信息，作出关于进货数量的决策。从统计决策的意义说，任何一个统计推断

（或预测）都可视为一种行动。这带来一种新观点，就是把损失的概念引伸于评价作统计推断的优劣。这种看法丰富了统计推断理论的内容，使得有可能用统一的观点去研究种种形式不同的统计推断。这正是瓦尔德在1950年提出统计决策理论的出发点。

概率论和数理统计通称为随机数学，它们是密切联系的同类学科。但是，它们又都各有它们自己所包含的不同内容。

概率论是先提出数学模型，然后去研究它们的性质、特点和规律性。比如，在一定模型下，两个随机变量的和、差、积和商的分布；又如，某随机变量序列的极限分布，前面提到的大数定律和中心极限定理都属于这一类。数理统计则是以概率论为基础，利用对随机现象的观察所取得的数据，来研究数学模型。或者说，数理统计是利用样本，对未知或部分未知的数学模型作出推断，例如，对未知参数的估计或检验等等，并同时给出这些推断的可靠程度。

3．数理统计的应用

数理统计方法在工农业生产、自然科学和技术科学以及社会经济领域中都有广泛的应用。

数理统计方法在农业中应用的一个主要方面，是对田间试验进行适当的设计和统计分析。试验设计的基本思想和方法，就是从田间试验开始发展起来的。象种子品种、施肥的种类和数量以及耕作方法的选定，都需要通过试验。农业试验由于周期长且环境因素变异性大，特别需要对试验方案作精心的设计，并使用有效的统计分析方法。数理统计方法在农业中应用的另一方面是数量遗传学的方法。例如，培育高产品种的研究中的数据分析使用了多种统计方法，如在遗传力的计算上，用了很复杂的回归和方差分量分析的方法。

数理统计方法在工业中的应用，有两个主要方面。一是在工业生产中，常有试制新产品和改进老产品、改革工艺流程、使用代用原材料和寻求适当的配方等问题。影响产品质量的因素一般很多，在进行试验时要用到各种多因素设计方法，及与之相应的

统计分析方法，以判定哪些因素是重要的，哪些是次要的，并决定一组最优的生产条件。这里需要用试验设计，回归设计与回归分析、方差分析等统计方法。另一方面是，现代工业生产有大批量和要求可靠性高的特点。为保证产品质量，需要在连续的生产过程中进行工序控制，制定成批产品的抽样验收方案，对大批生产的元件进行寿命试验，以估计元件的可靠性及包含大量各种元件的系统的可靠性。为解决这些问题，就要用质量控制图、抽样检验、可靠性统计分析等方法，它们构成统计质量管理的内容。

医学是较早使用数理统计方法的领域之一。在防治一种疾病时，需要找出导致这种疾病的种种因素。统计方法在发现和验证这种因素上，是一个重要工具。例如，长期以来人们怀疑肺癌的发生与吸烟有关，这一点得到大量统计资料的证实。另一方面的应用是，通过临床试验，用统计分析确定一种药物对治疗某种疾病是否有用，用处多大，以及比较几种药物或治疗方法的效力。对比试验、列联表、回归分析等是这方面的常用工具。

数理统计方法在自然科学和技术科学中也有广泛应用。在基础理论研究中，常常从一种观点出发，根据初步观察结果面提出一种学说或假说。它们是否正确，或在多大程度上正确，要诉诸大规模的试验验证，这就需要用试验设计和数据的统计分析方法。有时，先通过统计分析发现某种规律性，然后在理论上去寻求解释。一个著名的例子是孟德尔的遗传定律。孟德尔通过豌豆试验发现了这个定律。后来很多人进一步试验，并用数理统计学中的“拟合优度检验法”（假设检验）检验它。为这个定律寻求理论上的解释，是导致“基因学说”建立的一个重要原因。统计方法用于地震、气象和水文方面的预报，都有一定的效果。在地质勘探中，人们在一个地区的若干个点进行考察，对其结果用种种统计方法，如趋势面分析、对应分析等去进行处理，在此基础上建立某种经验性质的规律，以用于指导找矿。

统计方法在社会领域中应用的一个重要方面是抽样调查，在人力、物力时间不允许进行全面调查时，使用抽样调查可以做到

节省、快速、并获得满意的结果。另一方面，对社会现象的研究有向定量化发展的趋势。例如人口学，确定一个合适的人口发展动态模型，需要掌握大量的数据资料，并使用包括统计方法在内的一些科学分析方法。在经济学中，定量化的趋势比其他社会科学部门更早且程度更深，如用时间序列分析方法去研究市场预测，还运用回归分析方法和随机过程统计方法等，从面产生了边缘学科——数量经济学。

第十一章　运　筹　学

20世纪40年代，产生了一门新兴的应用数学——运筹学，它是利用数学工具谋求最优安排的一种方法，已广泛应用于军事、经济等筹划、安排，提高工作效率。

一、运筹学的产生

运筹学的思想早在古代就已经产生了。敌我双方交战，要克敌致胜就要在了解双方情况的基础上，作出最优的对敌的办法。我国古代就有"运筹帷幄之中，决胜千里之外"的说法。但是，运筹学作为一门科学是在第二次世界大战时期形成的。当时，同盟国在军事上面临许多复杂的战略战术问题，仅靠某一科学专家是难以解决的。为此，军方召集了各方面的科学家，在部队建立专门的机构来研究这些问题，并取得了卓著成效。早在1938年英国空军就有了飞机定位和控制系统，并在沿海有几个雷达站，可以用来发现敌机。但在一次空防大演习中发现，由这些雷达送来的（常常是相互矛盾的）信息，需要加以协调处理，以改进作战效能。这一任务的提出即产生"运筹学"一词。英国空军成立了运筹学小组，主要从事警报和控制系统的研究。在1939年和1940年，这个小组的任务扩大到包含防卫战斗机的布置，并对某些未来的战斗结果进行预测，以供决策之用。运筹学工作者在第二次世界大战中研究并解决了许多战争的课题，例如通过适当配备护效舰队减少了船只受到潜艇攻击的损失；通过改进深水炸弹投放的深度，使德国潜艇的死亡率提高；以及根据飞机出动架次作出维修安排，提高了飞机的作战效率等等。

在战争结束时，估计英国、美国和加拿大等三国的军队中，运筹学工作者已超过700人。战后，一些原在军队的运筹学

工作者，在英国成立了一个民间组织"运筹学俱乐部"，定期讨论如何将运筹学转入民用工业，并取得了一些进展。第一份运筹学杂志和英国的运筹学会分别于1950年和1953年出现了。世界上第一个运筹学会"美国运筹学会"于1952年成立。1959年成立了国际运筹学会联盟，到1986年已有35个会员国和6个兄弟学会会员3万余人，大多数会员国都办有自己的杂志。中国的运筹学会"中国数学会运筹学会"于1980年成立，于1982年加入国际运筹学会联盟并创刊《运筹学杂志》。著名数学家华罗庚教授把"统筹学"和"优选法"用于企业生产和经营管理取得很大经济效益。他的《优选法》一书，标志着我国运筹学研究与应用的成果。

由于运筹学研究对象极其广泛，它有着许多不同的定义。1976年美国运筹学会定义"运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人一机系统，并使之最好地运行的一门学科。"1978年前联邦德国的科学辞典上定义"运筹学是从事决策模型的数字解法的一门学科。"前者着重于处理实际问题，而对科学方法则未加说明，后者强调数字解法，而注重数学方法。英国运筹学杂志认为"运筹学是运用科学方法（特别是数学方法）来解决那些在工业、商业、政府部门、国防部门中有关人力、机器、物资、金钱等的大型系统的指挥和管理方面所出现的问题，其目的是帮助管理者科学地决定其策略和行动"等等。

运筹学主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划，管理方面的问题。当然，随着客观实际的发展、运筹学不但研究经济和军事的活动，而且已深入到日常生活了。运筹学可以根据问题的要求，通过数学上的分析、计算，得出各种各样的结果，最后提出综合性的合理安排，以达到最好的效果。

随着科学技术和生产的发展，运筹学已渗透到很多领域里，发挥了巨大作用。运筹学包括规划论、优选法、排队论、决策论、对策论等分支，内容非常丰富，应用非常广泛。

二、规划论

规划论也叫作数学规划论，它是研究计划管理工作中有关的安排和估值问题的，解决的主要问题是在给定条件下，按某一衡量指标来寻找安排的最优方案。在生产实践中，经常遇到要对许多事物进行安排和调度的问题，比如调运商品，当然会出现各种不同的方案，但是怎样从这些可行的方案中选择一个最好的方案，这就是规划论的研究内容。具体地说，规划论主要研究物资调运，巡回路线（如邮递员送信路线）、装卸工人的调配、最大通过能力、场地选择、合理下料、机器的合理利用等线性规划问题和非线性规划问题。

这些问题的共性在数学上可以概括成为：求某一函数在一定约束条件下的最大（或者最小）值问题。约束条件和目标函数都是线性函数的规划问题，叫作线性规划问题；否则就叫做非线性规划问题。这里举例说明线性规划。

有一个工厂生产A和B两种产品，已经知道每生产1公斤产品A，要用煤9吨、电力4千瓦、劳力3个（按工作日计算），所得的经济价值是7万元；而生产1公斤产品B，要用煤4吨、电力5千瓦、劳力10个，所得到的经济价值是12万元。而这个工厂现有的条件是360吨煤、电力200千瓦、劳力300个，问在这种条件下应该安排生产产品A、B各多少公斤，才能得到最大的经济效果？根据这个问题的要求、工厂计划人员可以列出数学式子，用数学语言表示。比如，设这个工厂生产产品A、B分别是 x_1、x_2 公斤，而 x_1、x_2 应该满足下列约束条件：

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360, \\ 4x_1+5x_2\leqslant 200, \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300, \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

并且使所创造的财富 $f(x_1, x_2)=7x_1+12x_2$ 的值达到最

大。$f(x_1, x_2)$ 也叫做目标函数。

从这里可以看出，不论约束条件或者目标函数都是呈线性关系的。因此，在规划问题中，凡最后能归结成上面形式的做学问题，就叫作线性规划问题。要解决上述类型的问题，从理论上讲都要解线性方程组。因此解线性方程组的方法（比如叠代法）以及关于行列式、矩阵的知识，在线性规划中都是非常必要的数学工具。

虽然规划论的基本思想和一些简单的方法很早就已产生，但规划论的迅速发展是在本世纪40年代前后，第二次世界大战时期，物资调运，下料及生产组织等生产实践需要和计算机的发展，大大刺激了规划论的发展，运筹学家在理论上对规划论进行了一些本质性的研究，致使能实际求解的线性规划的规模愈来愈大。并且规划论及其他数学分支的联系也愈来愈多，应用也日益广泛。

如果规划的目标函数和约束条件中，有一个或多个是变量的非线性函数，则称为非线性规划问题，数学工作者对此也展开了研究。非线性规划问题在实际中很多，数学模型比较复杂。还有一种规划问题和时间有关，叫做"动态规划"，近年来，在工程控制、技术物理和通迅中的最佳控制问题中，已经成为经常使用的重要工具。

规划论可应用在工厂中对机床负荷分配、工业材料的合理下料、物资调运等寻求最优方案。在农村中还可以对作物布局、劳力调配、麦场、机井、仓库设置等问题提出科学的建议；此外，在水利、建筑中对合理调配土方，实施多、快、好省的施工组织工作都有一定的作用，甚至对于选择最好的邮政投递路线，合理分配邮区等问题，线性规划都是一个好的工具。

三、优选法

优选法就是寻求最好的方式来解决最优化问题。在工程设计、生产技术、科学试验等许多方面，人们总想采取种种措施以取得最好的结果。这类问题，经过数学的归纳和提炼就是应用很

广的最优化问题。

优选法不仅要找出问题的最优解，而且要提高求解的效率。优选法名目繁多，大的方面可以分成单因素优选法和多因素优选法两类；单因素优选法又包括对分法、0.618法、分数法等；多因素优选法又包括爬山法、调优法等等。

对分法就是每次取因素所在范围的中点处做试验、每次可以去掉一半的范围，这是比较简单的方法，对于试验和节省贵重原料很有成效，还可以帮助求一些代数方程的根。举例来说，某生产队使用80%敌敌畏防治棉花红蜘蛛，为了确定棉花红蜘蛛死亡率达90%以上的药液稀释倍数，他们这样来进行试验：试验范围取3000～4000倍，试验的时候，第一点稀释倍数取试验范围的中点$\frac{1}{2}(3000+4000)=3500$（倍），试验结果，棉花红蜘蛛死亡率是86.9%，因为死亡率达不到要求，药液嫌稀，去掉3500倍以上部分，在3000～3500范围内继续取中点进行第二次试验，第二点的稀释倍数是$\frac{1}{2}(3000+3500)=3250$（倍），试验结果，棉花红蜘蛛死亡率是90%，达到了要求，因此选用3000～3250倍稀释药液，棉花红蜘蛛的死亡率可达90%以上，这个方法就是对分法。

0.618法是取试验点为所在试验范围的0.618比例处做第一次试验的方法。举例来说，某工厂酸洗钢材，假定根据以往的经验估计或者从理论上计算出酸液的稀释倍数是1000倍到2000倍之间。1000～2000（倍）之间。按照0.618的选点办法。首先在试验范围的0.618处做第一次试验，第一点的稀释倍数可由下式得出：

$$第一点=小+(大-小)\times 0.618,$$

这样，第一点的稀释倍数就是：

$$1000+(2000-1000)\times 0.618=1618(倍)。$$

然后，再在这一点关于试验范围的中点的对称点处做第二次试验，这一点的加入量可由下式得出：

第二点＝大＋小－中，

也就是"加两头减中间"，第二点的稀释倍数是：

2000＋1000－1618＝1382(倍)。

做了两次试验以后，就可以进行比较，如果第一点比第二点好，就保留第一点，去掉第二点以外的部分，试验范围变成1382～2000，如果第二点比第一点好，就去掉第一点以外部分，试验范围变成1000～1618。经过这样的处理以后，再来做第三次试验。假定前面试验的结果是第二点比第一点好，那么就在留下的试验范围1000～1618内找出中间一点(第二点)的对称点，做第三次试验，按照前面的式子，第三点的稀释倍数是：

1618＋1000－1382＝1236（倍）

再比较两次试验的结果，如果第三次比第二次好。保留第三点，去掉第二点以外的部分，就是去掉1382～1618这一部分，试验范围变成1000～1382。然后继续进行第四次、第五次……试验。直到找到最好的结果。

分数法是在试验点只能取整数，或者受条件限制，只允许做一定次数的试验的时候使用的方法。因为分数法要用到斐波那契数列，所以分数法也叫做斐波那契法。所谓斐波那契数列是这样一种数列，从数列第三项起，每一项都是它前面两项的和，这个数列的前10项是：

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}……
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89……

从这个数列可以有下列递推关系：

$$F_1=1,\qquad F_2=2,$$

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 3)。$$

由数列相邻两项的比 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ （$n=1，2，\cdots\cdots$）又构成一系列分数：

$$\frac{1}{2}、\frac{2}{3}、\frac{3}{5}、\frac{8}{13}，\cdots\cdots\frac{F_n}{F_{n+1}}\cdots\cdots。$$

数法的试验过程和0.618法一样，只是第一个试验点用斐波那契数列构成的$\frac{F_n}{F_{n+1}}$分数数列的某一个分数来代替0.618。至于选择哪一个分数，取决于规定的试验次数和试验范围。

爬山法是从盲人爬山的方法归纳得出的。盲人想要爬上山顶，就用手杖前、后、左、右地试，那儿高就往那儿走，不高就退回来换一个方向再走，这样一步一步向高处走。这样朴素的选优思想，目前在大生产中安排试验的时候，应用很多。

调优法是从一些选定的构成一定规则形状的基本试验点开始，然后根据试验结果，用对称道理决定新试验点，一步一步调向更优的地方。

优选法应用很广，首先被应用于化工与电子行业中工艺参数的优选、仪器设备的调试控制等方面，然后逐步在石油、冶金、煤炭、建材、纺织、粮食加工、机械、医疗卫生等领域得到了开发和应用。70年代以后，优选与电子计算机相结合，在优化设计、新产品试制、模型参数的识别、经济决策、经济发展规划优选等方面取得了很好的效果和经验。

四、排队论

排队论是运筹学的又一个分支，也叫作随机服务系统理论。它是研究各种排队现象，研究如何改进服务机构或组织被服务的对象使得某种指标达到最优的问题。

排队论最初是在20世纪初由丹麦工程师埃尔朗关于电话交换机的效率研究开始的。只是在第二次世界大战中为了对飞机场跑道的容纳量进行估计，它才被纳入运筹学的范畴。

在日常生活和工作中，经常出现排队现象，不仅人要排队，东西也要排队，有排队就必须等待。比如，码头的船只等待装卸，停车场的出租汽车等待租乘的旅客，打电话碰到占线，飞机抵达机场后遇到跑道还在占用等等。我们把打电话的人、到达的飞机等统一叫作顾客，电话线路、飞机跑道等统一叫作服务机构

（或随机服务系统）。这样，排队服务就可以分做三个步骤：第一，顾客的到达；第二，排队规则，第三，得到服务机构的安排。但是，顾客到来的时候和进行服务的时间都随不同的时机和条件而变化，因此，服务系统的状况也是随机的，也就是随各种时机和条件而波动。这里有一个问题是，怎样协调"服务机构"和服务对象"之间的矛盾。比如多增加一些出租汽车，旅客就方便了，但是服务机构成本增加了；相反地，减少出租汽车，服务机构成本下降，但是旅客排队的时间就延长了。又如要使打电话方便，就得线路多，线路多使用率就低，又会造成不必要的浪费。怎样使服务质量和设备利用率这一对矛盾处理好，怎样细致地、定量地研究这个矛盾问题，也就是研究队的长度、等待时间等等的平均数和分布情况，使服务系统安排最合理，这就是排队论研究的问题。

举例来说，有一个百货公司的存货仓库，每天都有几十个、几百个分公司（商店）的提货员要到仓库取货，提货员到达仓库的时间不同，要提取的货物品种也不同，这样就形成一个排队问题，需要仓库的管理人员解决。仓库作为服务系统，应该研究怎样合理安排各个分公司的提货，使提货员到达仓库后，减少排队等待时间，迅速把货取走，满足市场需要。这里面就存在这样一些问题需要研究：首先，提货员的到达不一定形成随机过程，比如，提货员按预约时间到达仓库，按照事先安排的预约，每个提货员到仓库的时间相距同样的时间间隔。但是，实际上他们到达的时间不一定是准确的等间隔的，因为提货员路上可能会遇到各种各样的偶然因素，所以到达的时间也是随机的。当然，这种随机又要比随机过程可能有更均匀的间隔。其次，排队规则"先来先服务"有时候不一定适用，比如，某些提货员所要提的货物是市场上特急的商品，仓库按规定可以优先照顾提取。这样就可能排到非优先的提货员前面。再其次，可以有多个发货员，如果这样，提货员可以在每一个发货员前面形成单独的排队，于是，怎样分配新来到的提货员参加排队就有各种各样可能的规则可供考虑。另外，提货员到达的频率和付货速度随着排队长度而变化的

情况也可能发生，比如，当排队太长的时候，新到的提货员可能等不了而离去。这样，在对同样的提货员提供一连串的服务（也就是付货过程）的时候，就形成复合的排队系统。

排队现象是一个随机现象，在研究排队现象的时候，主要是采用研究随机现象规律的概率论作为本学科的主要工具。此外，还要用到微积分和微分方程。

排队论把它所要研究的问题形象地描述成顾客（比如电话用户、发生故障的机床等等）来到服务台前（比如电话线路维修工人等等）要求接待。如果"服务台"已被其他顾客占用，那么就得排队等待。另一方面，"服务台"也时而空闲，时而忙碌。排队论这门学科就是通过数学方法求顾客等待时间、排队长度等的概率分布。

排队论还可以应用在水库用水量的调度、存储问题、生产流水线的安排、铁路分车场的调度、电力网的设计等，也都可以运用排队论的基本理论来进行计算，从而获得最合理的解决办法。

目前，排队论的发展着重于随机服务系统最优化问题的研究，也就是研究怎样改进系统的设计和控制，以提高系统的效率，取得最大的收益。

五、对策论

对策论又叫博奕论，它是从策略的观点出发，研究竞赛性、斗争性活动怎样取胜的一门分支学科。即它研究有利害冲突的双方在竞争性的活动中是否存在自己致胜对方的最优策略，以及怎样找出这些策略。

在竞赛或斗争中，胜负常常取决于双方策略的选择。比如，在我国历史上，齐王同田忌赛马的故事，就是运用对策论的典型事例。有一天，齐王要田忌和他赛马，规定各人从自己的上等马、中等马、下等马中各选一匹来赛，并且说好每输一匹马就要付出千金，每胜一匹马就可以获得千金。当时同等级的马，齐王的马要比田忌的马强，田忌要输三千金好像已成定局了。但是田

忌的谋士孙膑出了一个主意，叫田忌用下等马对齐王的上等马，中等马对齐王的下等马，上等马对齐王的中等马。比赛结果，田忌的下等马输了，而中等马和上等马都胜了，田忌反而赢得了千金。由此可见，在各类对策现象中，参与者应该怎样决策的问题是大可研究的。对策论最主要的就是证明在某些竞赛活动中这种最好的策略是存在的。

最初用数学方法研究"对策现象"是在国际象棋中开始的，后来发展到军事方面。

由于对策论研究双方冲突、致胜对策的问题，所以这门学科在军事方面有着最重要的应用。比如，在战斗中，甲方用一定数量的兵力向乙方进攻，为了使进攻获得最大战果，就要考虑集中一路或分几路进攻；乙方呢，也要依据甲方可能进攻的路线部署自己的兵力。也就是说甲乙双方都要寻求自己的最好的斗争方法，在数学术语上叫作寻求最优策略。例如，在第二次世界大战中，同盟国的空军和海军就曾经运用对策论解决了对轴心国的潜艇活动、舰队运输和兵力部署调配的侦察问题，取得了对敌斗争的胜利。

对策论是在实际需要而产生和发展起来的。如上所述，在作战中，飞机怎样侦察潜水艇的活动，兵力怎样部署，物资怎样调运；在生产中，设备和技术力量怎样安排调配；商品和市场需要怎样协调；在体育竞赛中，怎样根据对手情况安排分组和采取致胜的方法等等，这些都是对策论所研究的内容。

对策论一般具有这样几个最基本的要素，也是对策论的重要概念，那就是"局中人"、"策略"集，"赢得函数"。构成对策必然最少有两个相互斗争或者竞赛两个方面。也许是一个人（或一个集团）跟另外一个人（或一个集团）斗争（竞赛）；或者是一个人为一方、跟另外若干个人为一方的斗争（竞赛）；或者是一个人（或若干个人）为一方，跟自然界为一方的斗争；等等。任何一方面，都叫做"局中人"。在斗争或者竞赛中，"局中人"采取的各种办法，就叫做"策略"，一般来说，每一"局中人"都可能具有

两个以上的"策略"，所以也叫"策略"集。应该指出，"策略"这个概念是数学上的术语，它和政治上的方针、政策等概念毫不相干，不要混为一谈。对策的结果，总是有胜负之分的，每个"局中人"总是在对策结束后取得一定数量的"赢得"，"赢得"实际上是全体局势集合上的函数，它的值可正可负。每一个"局中人"都有自己的"赢得函数"。比如，比赛结果，胜的一方的"赢得"是1，那么负的一方相应地就得到－1的"赢得"。

对策论中现在有很多种对策类型，这里只简单地介绍"二人有限零和对策"。在对策论的各种类型对策中，这是一种最简单的也是最典型的对策。在这种对策中有两个局中人，这两个局中人的利益是完全相反的，双方所处的地位真正是对抗的，两个局中人的策略集很小，只有有限的个数，两个局中人赢得函数的和恒等于零。因此，这种对策叫作"二人有限零和对策"。

目前，对策论发展的趋势已和人工模拟结合起来，据报导，国外已研究了一种下棋机，就是把国际象棋大师们积累起来的各种策略都编成程序，送入电子计算机。对方走一步，电子计算机就选择事先编好的最好的一步。电子计算机的走法是根据对策论理论进行了复杂的计算后决定的，所以下棋机的走法都是经过优选的走法，据说已达到国际象棋大师级的水平。

对策论现在已经深入到经济、文体、教育等许多领域，比如，工厂的管理问题，球队的比赛问题都应用了对策论的理论。这说明对策论的应用是十分广泛的。

六、决策论

决策的任务是为决策者提供优化的或满意的决策及其可能结果的分析，供作决策时参考。

决策问题自古有之，但是随着社会的进步，决策问题越来越复杂。例如，考察在一条河流的上游是否要建造一个大型水电项目的决策问题，除考虑与工程直接有关的发电、灌溉等因素外，还应研究工程对环境 生态、航运、水产等的影响，以及要考察

工程对本地区及全国人口、经济乃至防务等的影响。只有在对这些重要的因素进行定性或定量的综合评定的基础上，才能做出好的决策。

决策问题的显著特点是．多目标性；决策影响的长期性；后果的不确定性；决策的序贯性，以及可供选用的决策的多样性。而在许多的决策问题中，决策往往都是一次性的。

决策分析的步骤，大体可分为：明确所要解决的决策问题，收集信息、确定目标，提出可供选择的方案，定性或定量地比较不同方案实施结果的利弊，决策者从中选择一个最优方案并付诸实施（做决策），对有的决策问题还要根据实施后反馈的信息适当调整所作的决策。对于复杂的决策问题，进行决策分析时往往把一个问题分解成许多相互有机联系的小问题，分别进行分析，然后综合得出结论。一个好的决策分析，通常要经过多次的反复才能完成。

决策问题主要有4个类型：

（1）确定型决策问题，如果每种方案只有一种确定的结果，则可选择最佳后果的方案作为决策方案。

（2）风险型决策问题，领导人在制定方案时，常会遇到许多人的主观愿望和能力无法控制的环境状况，如市场需求，原材料供应，政策税收等。这种环境状态的变化将直接影响到方案执行的结果。因而领导人在进行决策时，要冒一定的风险。但是，通过调查研究和历史资料统计的分析，能够确定未来各种环境状况出现的可能性——概率的，称风险型决策，所用数学方法是最大期望值法。

（3）非确定型决策问题，对未来会碰到什么情况毫无把握，例如新产品将来会碰到什么市场状态心中无数，或者无先例可循的非常规的、一次性决策。但其出现的概率无法加以预测，则这种决策问题叫作非确定型决策。数学上采用乐观法（大中取大法），即选最大效益方案作为决策方案。悲观法（小中取大法），即从各种最坏情况中选择结局最好的方法。最小最大后悔值法是

尽可能减少后悔的方法。它的意思是：有时哪个方案最优只能在将来知道，而决策过程又不能等待。如果决策人发现自己采取的不是最优方案，就会感到后悔。这个方法的源则是先找出各个方案的最大后悔值，然后选择最大后悔值为最小的方案作为最优方案。

（4）多级决策，有些决策问题包括两项或两项以上的决策，叫作多级决策问题。数学上用求最大期望值法。

决策分析作为一个专门名词，在20世纪60年代才出现于文献中。它首先在公司或政府机构的决策中获得了应用，如对海底石油开采的决策、政府为预防犯罪问题的决策、保健计划的决策等。目前的研究集中在多目标决策、多个决策者的情形、偏好随时间而改变的情形。为更好地实施决策分析，相应软件的开发也日益受到重视。

七、库存论

库存论是研究所需物资的生产时间、运输、需要量（消耗量）的概率分布、维修、变质等等问题，以制定某些库存策略使得某种指标达到最优。是研究物资储备的控制策略的理论。在工业、农业、商业、军事以及其他的各行各业中，要想不断维持正常的生产和工作，就必须储备一定数量的所需物资。储备过多，会引起积压，或因存放过久产生变质而造成浪费，占用仓库和需要保持一定人数的维护人员也会带来经济上的损失。但是，储量过少，又会供不应求，在工厂则引起停工待料，在商店则引起顾客转移他处，在农业上和农事上都会因失去时机而造成重大的影响。如何控制物资的库存数量，即何时补充库存，应该补充多少，是库存论的基本课题。

就仓库的管理体系的规模与复杂程度来说，单级管理与多级管理在处理方法上大不相同。就补充物资的方式来说，是随要随有，还是通过订货后一定时期必然到货，或不一定到货，这些都会对处理方法产生重要的影响。就存储费用方面来说，物资在仓

库中可能发生自然的或人为的损耗，可能出现失盗以及保险费、纳税、租金、正常的维护和管理费等等因素，都会引起策略上的差异。在需要方面，也会出现许多不同的情况。库存问题可以分为许多不同的类型，其中有些较易处理，有些较难。

在库存管理体系中，常用的信息处理方式有两种：一为成交汇报制，一为定期检查制。所谓成交汇报制，是指所有有关的事务诸如顾客的需求、定货、托运、货物的到达、接收、入库等等发生时，立即记录在案，并将信息送交有关主管人员。所谓定期检查制，是指按一定时期（通常是等长），将上述有关数字检查一次。近年来，由于计算机的普遍使用，成交汇报制用得较多，以前则常用定期检查制，因为它所需要的费用较低。

最早的专著是T.M.惠廷（T.M.Whitin，美国人）的著作。其后，系统性的著作相继出现。从20世纪50年代开始，就不断有人致力于库存论中的一些理论问题的研究。

八、搜索论

搜索论是研究关于在资源和探测手段受到限制的情况下，如何设计寻找某种特定目标的方案，并如何加以实施的理论和方法，目的是希望以最大的可能或（和）最短的时间找到该目标。它是运筹学初期的重要研究对象之一。

第二次世界大战期间盟军为了克服敌方潜艇对海上交通的严重威胁，提出了搜索大西洋中袭击盟军商船的德国潜艇的研究任务。当时建立了反潜战运筹小组从事搜索水下潜艇的数学分析，这标志着搜索论研究的开始。其成果发表在1951年由莫尔斯(Harold Marston Morse,1892～1977,美国数学家）和金布尔合著的《运筹学方法》一书中，1953～1957年库普曼在美国《运筹学》杂志上发表"搜索论"一文，对之作了系统的理论综述。至今，搜索论的发展已超出了传统的军事领域，在地下或海域的资源勘探、海上捕鱼、边防巡逻、搜捕逃犯、检索书籍、寻找故障等非军事领域中也得到了应用。

搜索过程的目的，首先是在用于搜索的资源和手段已经给定之下查明特定目标有多大可能存在于某个区域内，并以最大的可能或最短的时间找到它，通常用发现目标的概率、期望个数、期望面积、体积或期望搜索时间来描述；其次在于测量目标的状态参数，如速度、位置等，用适当的测量准确度来描述。搜索论主要研究前者。

搜索要素：

（1）目标特性，包括目标的几何形状、大小、个数、被发现的特征以及位置或运动的变化规律等。在搜索论中，通常把目标的存在看作离散空间或连续空间中的点（有些特定目标则需要用有限区域来描述）。它对搜索者而言，是不能预知的。如果目标是静止的，一般用均匀的、正态的或其他合适的概率分布函数（简称分布）来描述；如果目标是运动的，则当目标运动与搜索者行动无关时，可用马尔可夫过程、维纳过程来描述；当目标运动依赖于搜索者的行动策略时称为对括搜索，可用对策论来描述。

（2）探测特性。搜索者使用各种探源手段发现目标的概率，通常表示为某种概率函数。

（3）搜索力分配方式，包括探测手段数量和所耗费的搜索时间在空间上的分配，构成了具体的搜索策略，可以搜索者的运动轨迹或搜索区间序列、搜索时间序列、搜索力密度等表示。

搜索论的主要内容可分为两类：一类是描述性问题，即根据已知的目标（静止和运动的）位置分析、发现概率函数和特定的搜索策略（搜索力分配计划）构成搜索模型，计算发现目标的效果；一类是最优化问题，即根据已知的目标（静止或运动的）位置分布或行动策略、发现概率函数，对于给定的总搜索力，求解搜索效果达到最大的搜索策略，或者对于给定的搜索效果求静代价最小的搜索策略。

搜索论在实际应用中已取得不少成效，例如在20世纪60年代美国寻找在大西洋失踪的被潜艇打谷者号和蝎子号，以及在地中

海丢失的氢弹，都是依据搜索论获得成功的。

总之，运筹学在20世纪40年代以后得到迅速发展，这是由于：大规模的新兴工业的出现，同行业间的竞争加剧，迫切需要对大型工业的复杂的生产结构和管理关系进行研究，作出科学的分析和设计；产品的更新换代的加速，使得生产者必须密切注意市场情况和消费者的心理分析；高速计算机的出现，使一些复杂的问题能得到及时解决；从而运筹学有了现实意义。所以，运筹学的每一个分支学科的产生，都具有鲜明的实际背景。

运筹学有广阔的应用领域，它已渗透到诸如服务、库存、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性、设备维修和更换、检验、决策、规划、管理、行政、组织、信息处理及回复、投资、交通、市场分析、区域规划、预测、教育、医疗卫生的各个方面。

第十二章 数理逻辑

数理逻辑是一门近代化的逻辑科学，严格地讲是传统逻辑（形式逻辑）部分内容的数学化，形式化。它把数学方法应用于逻辑学，使逻辑学研究题材的范围更加宽广，使用的方法更加精密，并为推论和证明建立了严格的形式系统和理论。数理逻辑又称符号逻辑。

一、数理逻辑产生的历史背景

数理逻辑的兴起和发展，主要有两个历史背景：一是人们感到传统逻辑的不足，需要加以改进；二是由于数学基础的研究，产生了大量与逻辑有关的问题。从这两方面的发展产生了数理逻辑，并逐步发展完善起来。

1．传统逻辑的不足

传统逻辑始自亚里士多德，长期以来被认为完美无缺的，但19世纪以后，逻辑学家、数学家和其他科学家都感到以形式逻辑为主要内容的传统逻辑，远不是如此完美无缺的；相反，存在着不少缺点。主要缺点有三。

第一，传统逻辑所讨论的问题限于主宾式语句。亦即限于全称肯定（A）——凡S均为P，全称否定(E)——凡S均不是P，特称肯定（I）——有些S是P，和特称否定（O）——有些S不是P这4种主宾式语句。而且日常生活中，特别是科学研究中所讨论的问题不是主宾式语句都能包括的，在数学中甚至所使用的表达形式大多数不是主宾式语句，例如"$a>b$"，"点C介于点B和D之间"等。

第二，传统逻辑的推理形式限于三段论式，事实上，人们日常的思维活动并不都是三段论推理。例如在几何学中，我们经常

讨论的问题是，"如何从b介于a、c之间，及d介于b、c之间，而推出b介于a、d之间及d介于a、c之间"这类问题。可见仅仅使用传统逻辑是不够的。

第三，传统逻辑没有关于量词的研究。虽然传统逻辑很重视概念外延的研究，但由于它限于研究主宾语句和没有"变主"的概念，在表示能力上受到很大限制。

因此，传统逻辑作为思维活动的工具，已远不适应近代科学的发展，非要现代化不可，也就是要形式化和数学化。

2．数学基础的研究、发展对逻辑提出新的要求（见第十五章）

3．数理逻辑的产生过程和主要代表人物

早在16世纪，英国的霍布士首先提出在逻辑学中应用数学方法的设想。他认为一切思维不过是计算（即加与减），正如算术学家教人数目的加与减，几何学家教人在线、形、角、比例、快速度、力等方面进行加减，逻辑学家则教人在学的推论方面进行加与减。与霍布士同时代的法国数学家笛卡儿认为可以有一个普遍适用的方法来解决各种科学问题，他把这种方法叫作"普遍的数学"。

但是霍布士和笛卡儿都是没有尝试建立这种新逻辑，最早真正提出数理逻辑思想的是德国数学家莱布尼茨。他认为数学家的认识在同行中是大家都赞成、毫无争论的，如果有谁无心地做错了，别人都能够指出来，做错者自己也会心悦口服地承认错误，决不会在那里狡辩。而对哲学家（包括逻辑学家）来说，情况便不相同了，彼此争论不休，谁也说服不了谁。因此，莱布尼茨想替逻辑学建立一种代数，使得逻辑的推导象代数的推导那样，有明确无疑的规则，除了无心的错误或者开始时的根据（即前提）有误外，任何人都将作同样的推导，获得同样的结果。莱布尼茨试图把每一个原始概念与一个素数联系起来，例如以"3"表示"人"，以"7"表示"有理性"，那么"21"就表示"有理性的人"。他还试图把三段论化为这样的体系，但是未达到目的。从莱布尼茨

发表的文章和已经整理出来的遗稿来看，莱布尼茨在建立数理逻辑方面的工作做得很少，在他的逻辑思想中有以下几个基本点：

（1）所有概念可以还原为少数的原始概念，这些原始概念构成"思想的字母表"；

（2）复合概念可以由原始概念通过乘法得出；

（3）原始概念之间是没有矛盾的，可以用素数来表示；

（4）任何命题都是谓项性的，也就是说可以还原为一个对主项有所述说的命题；

(5)任何真的肯定命题都是分析命题，也就是说，谓项包含在主项之中。

莱布尼茨基于这五点思想，用初等数学方法建立逻辑演算，但由于他保留了概念、判断的内涵的解释，因此运用数学方法时，遇到不少困难，取得的成绩不大。但这些明确的思想，确立了他为数理逻辑创始人。

在莱布尼茨之后，数理逻辑在相当一段时间内无人问津。直到19世纪中期，英国数学家布尔(George Boole, 1815～1864)运用了了哈密顿等人的成就，完全从外延角度进行数量化处理，才使数理逻辑的建立迈出了一大步。

布尔的方法与莱布尼兹的不同，他将目标适当缩小，只用代数的形式发展了集合代数。布尔的这套方法后来就称为布尔代数或逻辑代数。

布尔认为他的代数推导方法完全和数学的推导方法相同，并认为传统逻辑的三段论能够解决的问题，用布尔代数都可以解决。而且传统逻辑的三段论很难解决的问题用布尔代数也可以解决。例如，设有4种性质 a、b、c、d，经实验，结果有下列情况：

（1）a、b 同时出现时，c、d 必有一个出现，且只有一个出现；

（2）b、c 同时出现时，a、d 或同时出现，或同时不出现；

（3）如果 a、b 均不出现，则 c、d 也均不出现；

（4）如果 c、d 均不出现，则 a、b 也均不出现。

问如何由 b、c 而决定 a。

对这样的问题，用传统逻辑的三段论就不大好办了，而用布尔代数，可以很快得出答案：当 b 不出现而 c 出现时，则 a 出现，反之，当 a 出现时，b、c 必有一不出现。

可见布尔用代数方式改造逻辑，就扩大了逻辑学的应用领域。布尔代数是数理逻辑的早期形式，布尔也被公认为数理逻辑的第二个创始人。

但是布尔代数从理论上讲，还不足以构成数理逻辑的基础。布尔用代数的方式改造逻辑，而且使用数学方法来推导，可是数学本身是根据逻辑规律推导而来，这对数学来说，它是先承认逻辑规律，然后进行数学推导的，没有什么不妥；而对布尔代数来说，它是由数学来推导逻辑，如果用它来作为数理逻辑的基础，就变成根据逻辑规律来推导出逻辑规律，犯了循环论证的错误，理论上不能自圆其说。

1879 年德国数学家弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege，1848～1925)克服了布尔代数的缺点，使数理逻辑初步成为一个科学体系。

弗雷格采用一些极简单的、极机械的规律，以及一些简单明了的公理，从这些公理出发，根据所采用的极机械的规律而推出整个逻辑来，这样也就避免了循环论证的错误。

弗雷格在建立数理逻辑上的另一个更为重要的贡献是引进量词 $\forall x$ 和 $\exists x$，从而建立了在逻辑中十分重要的一阶谓词演算。这也是历史上第一个严格的逻辑演绎公理系统。

由于弗雷格的这些功绩，他被推崇为数理逻辑的第三个创始人。不过弗雷格所用的符号太特别了，以致他的著作当时竟无人能看懂，至少是当时没有被人注意，宣扬和继承。

在弗雷格稍后，皮尔斯(Charles S.Peirce,1839～1914，美国人)引进和研究了量词。但是他们的研究成果没有弗雷格完善，他和弗雷格的工作合起来是对布尔代数进行了重大革新。第一，他们明确指出了布尔的命题代数实际上是命题函数代数。一个命题(如约翰是人)只包含常量，一个命题函数(如 x 是人)包含

着变量。一个命题总是真的或假的。第二，他们明确指出，当研究命题函数代数时，必须添入量词，才能充分发挥力量。因此他们都公开使用量词，并对量词的性质作了详细的研究。

再后，意大利数学家皮亚诺(Giuseppe Peano, 1858～1932)在建立算术公理体系时，实际上比前人更广泛地在数学领域里用符号来阐述命题。今天所沿用的记号大体上是由皮亚诺制定的。此外，他又把集合论中的属于(∈)和包含关系(⊂)区别开来，使数理逻辑的基础部分——逻辑演算趋于完善。

罗素(Bertrand Arthur William Russell, 1872～1970，英国数学家)继承了皮亚诺的研究，并在每个方面都达到了完善的地步。他把19世纪末数理逻辑的总成果汇集在他和怀特海(Whitehead, A.N. 1861～1947，英国数学家)合著的《数学原理》中，成为当时数理逻辑理论体系的集大成者。

二、数理逻辑的基础理论

数理逻辑的基础部分是逻辑演算。逻辑演算由两个组成部分构成：一是命题演算，另一是谓词演算。下面分别加以介绍。

1. 命题演算

命题演算是研究关于命题如何通过一些逻辑连接词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法。什么是命题呢？命题是指有具体意义的又能判断它是真的或假的句子，在数学中，命题一般用A、B、P、Q等来表示。

A：北京是中国的首都。

B：凡直角都相等。

P：二乘二等于五。

Q：煤球是白的。

这几个句子都是能够判断它的真假和具有具体意义的句子，所以叫做命题。从句子中，我们可以判断出命题A、B是真的，P、Q是假的。

通常用“T”表示命题的真，用“F”表示命题的假。命题的真

和假叫做命题的真假值，或者叫做真值。这样，上述4个命题中，A、B的真值是T，P、Q的真值就是F。

这几个命题都是由简单的句子构成的，我们把它们叫做简单命题。如果把简单命题通过一些逻辑连接词连起来，就可以组合成复合命题。

最基本的5个连接词是"或"、"与"、"非"、"若…则…"，"当且仅当"。这些连接词分别用符号"∨"、"∧"、"┐"、"→"、"←→"来表示，比如，

命题P：小王今天去上班。

命题Q：小王今天看电影。

那么命题P∨Q就表示：小王今天去上班或小王今天去看电影，读作："P或Q"。命题P∧Q表示：小王今天去上班和看电影，读作："P与Q"。命题┐P表示原命题P的否定，也就是小王今天不去上班，读作"非P"。

再举例来说，如

命题X：三角形ABC有两个角相等。

命题Y：三角形ABC是等腰三角形。

那么X→Y读作"若X则Y"，表示如果三角形有两个角相等，则它是等腰三角形。命题X←→Y读作"X当且仅当Y"，表示三角形有两个角相等当且仅当它是等腰三角形。

经过逻辑连接词的作用所形成的复合命题，它的真值是什么呢？它和原简单命题的真值又有什么关系呢？一般可以通过列表来表示，这种表叫做真值表。下面就是五种真值表。

P是真的，┐P就是假的。

P是假的，┐P就是真的。

当且仅当P和Q至少有一是真的时，P∨Q是真的。

当且仅当P和Q同时都是真的时，P∧Q才是真的。

只有当P是真的，Q是假的时候，P→Q是假的，其余都是真的。

当且仅当P和Q同时真的或同时假的时候，P←→Q才是真的。

对于任意的复合命题都可以用上述真值表作根据，然后列出

命 题	P	$\neg P$
真	T	F
值	F	T

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

表来加以分析。

如果我们把命题看作运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑连接词看作运算符号，像代数中的"＋""－"、"×"、"÷"那样，那么由简单命题组成复合命题的过程，就可以当作逻辑运算过程，也就是命题演算。

这样的逻辑运算也同代数运算一样具有一定的性质，满足一定的运算规律。例如交换律、结合律、分配律。同时也满足逻辑上的同一律、吸收律、双否定律、德摩根定律、三段论定律等等。利用这些定律，我们可以进行逻辑推理，可以简化复合命题，可以推证两个复合命题是不是等价，也就是它们的真值表是不是完全相同等等。

两个命题 P 和 Q 等价，用符号"$=$"表示，即 $P=Q$。比如，逻辑运算满足：

交换律：对任何命题 P、Q 都有：

$P \vee Q = Q \vee P$，$P \wedge Q = Q \wedge P$。

结合律：对任何命题 P、Q、R 都有：

$$\begin{cases}(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R) \\ (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)\end{cases}$$

分配律：对任何命题 P 都有：

$$\begin{cases}P \vee F = P \\ P \vee T = T；\end{cases}$$

$$\begin{cases}P \wedge F = F， \\ P \wedge T = P。\end{cases}$$

余补律：对任何命题 P 都有：

$P \vee \neg P = T$，$P \wedge \neg P = F$。

命题演算的一个具体模型就是逻辑代数。逻辑代数也叫开关代数，它的基本运算是逻辑加，逻辑乘和逻辑非，也就是命题演算中的"或"、"与"、"非"。运算对象只有两个数0与1，相当于命题演算中的"真"和"假"。

逻辑代数的运算特点同电路分析中的开和关、高电位和低电位、导电和截止等现象完全一样，都只有两种不同的状态。因此，它在电路分析中得到广泛的应用。

利用电子元件可以组成相当于逻辑加、逻辑乘和逻辑非的门电路，就是逻辑元件。还能把简单的逻辑元件组成各种逻辑网络，这样任何复杂的逻辑关系都可以由逻辑元件经过适当的组合来实现，从而使电子元件具有逻辑判断的功能。因此，在自动控制方面有重要的应用。

2. 谓词演算

谓词演算也叫作命题函项演算。在谓词演算里，把命题的内部结构分析成具有主词和谓词的逻辑形式，由命题函项，逻辑直接词和量词构成命题，然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系。

什么叫命题函项呢？命题函项是指除了含有常项以外还含有变项的逻辑公式。常项是指一些确定的对象或者确定的属性的关系；变项是指一定范围内的任何一个常项，这个范围叫作变项的领域。命题函项和命题演算不同，它的真假值依变项所对应的原项而定。如果以一定的对象概念代替变项，那么命题函项就成为真的或假的命题了。

举例来说，如果"x是偶数"是一个命题函项，其中x是变项，"是偶数"是一个谓词常项。我们把一些数6、8、10代入x，那么这个命题就成为真命题，因为"6是偶数"、"8是偶数"、"10是偶数"都是真的。如果把一些数3、5代入x，那就成为假命题了，因为"3是偶数"、"5是偶数"都是假的。

量词最常用的有全称量词和存在量词两种。全称量词是"任何x,…"，一般用符号"$\forall x$表示"，比如"$\forall x(x^2>0)$表示"任何x，$x^2>0$"，也就是表示"凡数的平方都大于0"。存在量词是"有x，

……"，一般用符号"∃X"表示，比如"$\exists x$ $(5<x<7)$"表示"有 x，$5<x<7$"，也就是表示"有数介于 5 和 7 之间。"

命题函项加上全称量词或者存在量词，那么它就成为全称命题或者特称命题了。比如" x 是奇数"是命题函项，加上全称量词后变成"凡 x是奇数"，就是全称命题，加上存在量词后变成"有x是奇数"就是特称命题。

以上基本上是数理逻辑运算的内容。

三、数理逻辑的主要分支

在20世纪中，数理逻辑的内容，以狭义到较广义、最广义大致形成三个层次。

1．最狭义的数理逻辑

通常称为谓词逻辑或经典谓词逻辑。这是对从亚里士多德三段论演变产生的传统逻辑的严格化和必要的推广。这一部分在数理逻辑中是最基本的部分，也是传统演绎逻辑的基本内容的精密化、精确化和完善化。它是演绎逻辑的基础，也是数学在证明定理时所用的最基本的逻辑推理规律。

2．较广义的数理逻辑

由于数学奠基问题的研究而形成了四个数理逻辑分支，即模型论公理集合论，递归论和证明论，简称四论。这四论构成现代数理逻辑的主要内容。这样的数理逻辑就是数学的逻辑，即数学逻辑。

3．最广义的数理逻辑

除了上述内容外，还包括归纳逻辑、包含可能、必然等模态词的模态逻辑，内含逻辑、多值逻辑、包含时间因素的时态逻辑等等。它仍然是用数学方法研究的逻辑。

下面着重介绍数理逻辑的主要分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论。

1．证明论

证明论是希尔伯特提出的，给哥德尔（Kurt Gödel,

1906～1978，奥籍美国数学家)等人的深入研究而得到发展。要实现希尔伯特的无所不包的证明系统的设想（希尔伯特纲领）是不现实的。哥德尔的不完全性定理证明了这点。但在有限的范围内证明某一数学系统的一致性和无矛盾性确是必要的。证明论的主要内容是证明数学(具体些说，是自然数论和集合论)的不矛盾性。它是研究数学证明的理论，研究数学证明的规律的，所以证明论又叫作元数学。元数学的特点是着眼于整个系统，把整个系统作为研究的对象。希尔伯特认为，在研究数学理论的相容性时，在彻底公理化以后，可以暂时舍弃内容，集中注意力于形式方面，把基本概念看作无内容的概念(和通常的公理系统那样)，因面可以把推理过程只看作符号演变的过程。这样，如果能证明从表示公理的符号式子出发，无论怎样演变，都不能演变出"0≠0"，那么数学理论的相容性就得到证明了。证明论为数理逻辑发展出崭新的面貌提供了强有力的工具。

2．模型论

在数理逻辑中，对形式系统的研究，往往借助于对满足这些形式系统的数学结构的研究来完成，这种数学结构称为模型。对模型加以统一研究的科学称为模型论，所以模型论是研究形式系统和对它的解释之间的关系的理论。模型论本来是证明论的副产品，但它发展得很快，至今已与证明论分庭抗礼，成为数理逻辑的四大部门之一。原来要证明某种理论不矛盾，最简捷的办法是作出该理论的模型。如果某种理论有模型，它便不会矛盾。在造模型的过程中，当然要讨论各种模型的性质，讨论各种模型彼此的关系，讨论模型的分类等，这些研究便促使模型论日益发展，逐渐壮大成熟。

(Abraham Robinson,1918～1974，美国数学家)利用非标准 模型把无限小、无限大引入数学分析中，得出非标准分析。

3. 递归论

递归论是关于可计算性问题的理论，它也是从希尔伯特计划的证明论研究中发展起来的，递归论把可证明性问题转变为可计算性问题。古典递归函数是在自然数上定义的一种函数，对未知数的计算常常回到已知值而得出，所以叫作"递归"。

递归函数论又叫作能行可计算理论。数学中好些存在定理，都不是能行的，即在要求具体给出所存在的解时，是很难给出的。这种非能行的存在定理，绝大多数是由反证法给出的，其证明过程大体如下："如果某某方程无解……，必导致矛盾，以而方程有解。"根据这种证法，我们很难从中找出该方程的根。递归函数论便是强调能行性而发展起来的。它是从最原始的函数开始，根据能行性的办法逐步作出各层中间函数，使得各函数之值都是可以计算的，直至最后获得解。这便是递归论的着眼点之所在。

1936年英国数学家图灵(Alan Mathison Turing,1912～1954)把计算性概念同机器程序，形式系统的概念统一起来。凡能用图灵机器计算的函数都是能关于可计算的。所谓图灵论题即是断言：凡是能行可计算的函数都能用图灵机器计算，这个论题虽不能形式化地证明，但已为科学家所接受。自从电子计算机出现以后，能行性理论更受到人们的重视，因为一般递归函数都可用电子计算机计算。

4. 公理化集合论

公理化集合论是用公理化方法重建朴素集合论的研究以及集合论的元数学和集合论的新的公理的研究。在传统逻辑中已把主语、宾语的关系解释为类的包含关系，集合论问世后，许多人都把集合概念当作逻辑概念。但是集合论虽已成为近代数学的基本工具之一，而本身尚有许多问题没有解决。集合论在数理逻辑中也占有很重要的地位，因为集合的概念，集合与它的元素之间的

关系非常复杂，按照通常的数学推理，稍不小心，便会导致矛盾，这是别的部门，别的学科所没有的现象。如何仔细地检查在集合论中的推理，如何使集合论不出现矛盾是一个重大问题。因为集合论的问题既牵涉到逻辑学，又涉及到整个数学。

由于集合论悖论的存在，已经可以看出集合论的不相容性，于是人们开始研究如何改造集合论，即如何删除矛盾的部分而成为相容的理论体系。为了修改集合论，本世纪初创造了公理化集合论（主要是基于罗素等人对集合论的改造工作），以区别康托尔的古典集合论（或朴素集合论）。

1939年哥德尔证明了选择公理和连续统假设的协调性，提出了可构成公理。1963年美国数学家科恩(Paul J.Cohen，1934～——)证明了选择公理和连续统的独立性，创造了著名的新方法——力迫法（即一种构造公理系统的模型方法）。力迫法的产生不仅使集合论有了重大发展，而且使数理逻辑的几个主要分支有了新的发展。

总之，证明论、模型论、递归论和公理化集合论是近代数理逻辑的四个主要部分。这些部分的发展主要是在集合论悖论发现后，在大力开展数学基础的研究中，形成和发展起来的。

四、数理逻辑的方法论意义及其局限性

数理逻辑在一个相当长的时间内是作为一门纯理论的学科而

想指导下，人们成功地利用计算机证明了数学史的著名难题——四色定理。

与计算机科学发展相联系的数理逻辑还是离散数学的一个重要内容，每一门新兴学科没有不是需要同时从离散和连续两方面去考察从而得到发展的。从离散方面考察时，便离不开数理逻辑。因此，数理逻辑和边缘科学以及许多数学分支（尤其是新兴部门）都具有非常密切的关系。

数理逻辑中的公理化集合论的成果，在公理化方法、形式化方法和模型论方法方面具有重大的逻辑意义，也就是方法论意义。

首先，在解决第三次数学危机方面，使用公理化方法和由它发展起来的形式化方法，有可能解决集合论悖论问题，亦即避开悖论而保存集合论的科学成果。

其次，形式化方法也是发现新定理、探求新结果的一个重要手段。

第三，数理逻辑在探讨思维过程的机械化问题上也有了重要的方法论意义。

第四，数理逻辑不仅借助于数学方法研究各种问题，而且研究数学中的逻辑问题，它把数学语言、推理和计算以及公理化方法、形式化方法和构造模型方法（构造标准模型和非标准模型）作为自己的研究对象，它不仅指描述概念，表达思想，而且还通过它自身的特殊的逻辑技巧和数学技巧寻求新的结果。它所获得的新结果对于数学和逻辑学都有重大影响，从而对其它科学也都有影响。

但是，数学逻辑不注意研究发展因素，基本上不关心思维和现实的关系问题，因而数理逻辑不能反映辩证思维的形式和规律。思维中有一些因素和方面，是可以用数量或数量方面来加以解释的，如数、概念、判断的外延、一般和单一的关系等。因为是量的关系，所以可以成为演算的对象，通过逻辑演算使数理逻辑明显地优于传统逻辑。但是，思维的形式不能同内容分开，而且概

念的内涵是决定外延的因素，外延既不是第一性的，也不能脱离内涵而独立存在。因此，数理逻辑作为逻辑工具的作用也是有限的，它只是在思维活动的某些方面，某些范围内才起作用。

第十三章 计算数学

现代科学技术的迅速发展，特别是电子计算机的出现，引起了计算工具的大变革，数值计算对于生产的发展更加显示出巨大的作用和潜力。因此，数学中的一个虽有悠久历史，但是发展比较缓慢的分支——计算数学也开始取得了新的实践意义，发展了新的内容。

一、计算数学的产生

在每个人生活中的数学活动总是以记数和计算开始的，而且终其一生。计算是与生活联系最直接、最密切的一环。在人类的数学发展史中，计算也占有类似的地位。数学最初导源于计算，计算曾经是古代数学的最重要的组成部分。

中国古代数学曾有辉煌的成就，尤其以计算性和实用性而著名，这是与古希腊数学的概念性和推理性特点所不同的。中国在公元前14世纪的商代就基本形成了十进制的位值记数制，而在印度直到公元6世纪才出现，流传到西方则更晚。中国春秋战国时期就形成并发展了算筹，作为通用、有效的计算工具。以后又改进演化成为算盘，相应发展了珠算方法；中式算盘及其变种在世界上许多国家一直沿用至今。

公元前2世纪中叶希腊阿基米德(Archimedes 约公元前287～212)提出曲直转化极限趋近的方法，并据此算出有一定精确度的圆周率π值。这种方法的思想是微积分的先驱。中国北魏刘徽提出"割圆术"，计算出π=3.1416。5世纪中国南朝刘宋的祖冲之（429～500）发展了缀术，据此算出更为精确的π值，领先于世界一千多年。

在代数方程解法方面，中国古代有很高的成就，公元前1世

纪汉代《九章算术》一书记载了开平方和开立方的算法，讲述联立一次方程解法。这种解法本质上就是近代的消元法，比欧洲早出现了一千多年。关于高次代数方程的近似解在《九章算术》中已具雏形，到宋代秦九韶和元代朱世杰（1290前后在世）发展完善。

15世纪欧洲资本主义工商业兴起，科学技术有了新发展，数学发展中心转移到欧洲。以解析几何与微积分为标志的近代数学发展，数值计算方法也有相应的进步。数学家们对计算方法作出了重要贡献。牛顿、欧拉等发展了一般插值方法与差分方法，高斯和切比雪夫(Лафнутий Львович,Чебышев, 1821～1894，俄国数学家）发展了最优逼近的方法与理论。在高次代数方程方面发展了牛顿迭代解法。在线性代数方面发展了高斯、若尔当消元法以及各种迭代法。微积分发展的同时，也出现微分方程的离散化与数值解法。随着科学技术发展，人们开始认识到数值计算的重要性。

20世纪40年代，由于军事上的需要，技术条件的成熟，于1946年制成电子计算机，这是人类计算工具的一次革命。它的诞生，在计算速度上要比原有人工操作的机械式计算工具提高了3～5个量级。40年来随着计算机迅猛发展，过去大量复杂的计算问题，现在都能运用计算机解决。比如，发射一颗探测宇宙奥秘的卫星，从卫星设计开始到发射、回收为止，科学家和工程技术人员、工人就要对卫星的总体、部件进行全面的设计和生产，要对选用的火箭进行设计和生产，这里面就有许多数据要进行准确的计算。发射和回收的时候，又有关于发射角度、轨道、遥控、回收下落角度等等需要进行精确的计算。又如，在高能加速器里进行高能物理实验，研究具有很高能量的基本粒子的性质，它们之间的相互作用和转化规律，这里也有大量的数据计算问题。现代工业、农业、商业、交通运输、医疗卫生、文化教育等等，都有许多数据需要计算，要应用电子计算机进行大量计算。所以，计算在整个科学技术和经济生活中的重要性得到前所未有的提高；同时，以原来分散在数学各分支的计算方法为基础的一门新的数学

科学——计算数学开始形成并迅速发展。冯·诺依曼对计算数学形成作出了重要贡献。

二、计算数学的研究内容

计算数学是研究计算问题的解决方法和有关数学理论问题的学科。计算数学属于应用数学的范畴，它主要研究有关的数学和逻辑问题怎样由数字自动计算机加以有效解决。电子计算机的迅速发展和生产实践需要计算的问题越来越多，大大地推动了计算数学的发展。

计算机和计算方法的发展是相辅相成、相互制约和相互促进的。计算方法的发展启发了新的计算机体系结构，而计算机的更新换代也对计算方法提出了新的标准和要求。自计算机诞生以来，经典的计算方法业已经历一个重新评价、筛选、改造和创新的过程；与此同时，涌现了许多新概念、新课题和许多能够充分发挥计算机潜力、有更大解题能力的新方法；这就构成了现代意义下的计算数学。

从数学问题的来源或类型来看，计算数学包括数值代数、最优化计算、数值逼近、计算几何、计算概率统计、数学物理方程数值解等。

1. 数值代数

为了运用电子计算机解决实际问题，需要进行一系列的数学准备工作。首先要把具体问题数学化，就是建立一个反映问题本质的数学模型，比如列出方程，提出定解的条件，形成一个要求定解的数学问题。这项工作是和以后的解题工作密切相关的，但是通常不属于计算数学的范围，而是各专业本身或者应用数学方面的工作。数学问题形成以后，进一步的数学准备工作就是制定问题的数值解算方法，也就是计算方法。这里既要研究实践中提出的数学问题的数值解法（特别是适应于电子计算机的数值解法），也要研究数值计算过程本身的规律性。在研究计算方法的时候，一方面要针对问题的数学特征，充分运用数学上已有的方

法和原理；另一方面也要结合问题的物理本质，用它来指导或提示解题方案的制定。

数值代数就是用代数方法来进行数值解法。数值代数包括线性代数、高次代数方程、超越方程和非线性方程组数值解法，属于有限维离散型问题。由于实践的需要、大型的稀疏系统是这个领域的主要对象。计算机有限字长引起的舍入，使得算术的结合律、分配律不成立，从而产生数学公式等价面算法不等价的问题，不同的算法结构产生差别很大的计算误差，数值稳定性正是刻画算法这一特性而受到应有的重视。由于方程组的规模愈来愈大，从算法上考虑节省计算量、存贮量的迫切性和潜力也愈大。传统高斯消元法的各种变形，正是从数值稳定性、计算量、存贮量几个方面考虑的。稀疏技术、一般的特大型稀疏线性方程组的求解方法、非线性方程大范围收敛的求解方法是这个领域的重要课题。

所谓高斯消元法，又称消去法，即解线性代数方程组时，将某一方程乘以某些常数分别加到其他方程上，以消去这些方程中的某一未知量。重复施行这一步骤，就可逐步消去未知量，最后只剩下一个未知量。用矩阵的语言来说也是对方程组的系数矩阵或增广矩阵（加上右端项所成的矩阵）进行初等变换，使它的一些元素（例如主对角线以下的元素）为零。

数值代数的一个重要方面是快速算法。快速傅里叶变换是计算有限傅氏级数即周期性离散傅氏变换的一种递推算法。它把 N 点变换计算量从传统的 $O(N)^2$ 降至 $O(N\log_2 N)$，对实践上要求的大 N，工效大幅度提高，基本上克服了所谓"时间域"与"频率域"转换的计算障碍，为调和分析方法（即傅里叶级数与傅里叶积分理论）在许多科技领域，特别为谱析、全息、信号处理、图像处理等方面广泛应用计算机开辟了道路，也推动了各种快速算法的研究和计算机阵列式处理器的研制和发展。

我们知道五次及五次以上的代数方程不存在求根公式，因此，要求五次以上的高次代数方程的解，一般只能求它的近似解，求

近似解的方法就是数值代数的方法。对于一般的超越方程，如对数方程、三角方程等等也只能采用数值代数的方法。人们寻求找出比较简捷、误差比较小、花费时间比较小的计算方法，常用方法之一有迭代法，也叫作逐次逼近法。

迭代法的基本思想是这样的：对于一般的一元方程可以写成$f(x)=0$的形式。我们把它改写成

$$x=g(x)$$

的形式。然后选择一个已知数x_0作为所求方程的第一个近似解，我们把这个解叫作初始值。当然，这个解可能和要求的真正解有很大的误差。

我们把x_0代入方程中，得到

$$x_1=g(x_0)。$$

x_1作为第二个近似解，再把x_1代入方程中，又得到

$$x_2=g(x_1)。$$

这样继续下去，就有

$$x_3=g(x_2),$$

$$x_4=g(x_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1}=g(x_n)。$$

如果$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$，我们就停止迭代。这里$\varepsilon$是一个预先给定的数，它根据问题要求的精确度来确定。比如，要所求的近似解精确到小数点后4位小数，可取$\varepsilon=0.00005$。如果$|x_{n-1}-x_n|$确实小于ε，我们就可以认为第$n+1$个近似解x_{n+1}就是所求方程的近似解。这个时候解x_0，x_1，$\cdots\cdots x_{n+1}$的序列是收敛的。

迭代法还可以用来求线性代数方程组的解。求方程组的近似解也要选择适当的迭代公式，使得收敛速度快，近似误差小。在线性代数方程组的解法中，常用的塞德尔迭代法、共轭斜量法、超松弛迭代法等等。此外，一些比较古老的消元法，如高斯消元法、追赶消元法等等，在利用电子计算机的条件下也得到广泛的应用。

2．最优化计算

在一定约束之下如何选取某些因素的值使某项(或某些)指标达到最优的一门科学。最优化方法可解释为可用来改进某些数量值的方法。因此，"最优"一词可以从相对的意义上来理解。在实际生活中，这些数量值可以是经济效益、速度、温度、一项对策的支付、武器的破坏力等等。实际上，最优这一概念是无处不在的，因此作为达到最优的一种手段的最优化方法，应该是而且确实也是变化无穷的。运筹学中所处理的问题绝大部分都是最优化问题。用来解决这些问题的方法，例如数学规划、排队论、决策分析、模拟技术等等，自然也就属于最优化方法这一范畴。除此之外，最优化还包括工程控制、最优控制、系统科学等。

某些最优化方法（例如拉格朗日乘子法；一些简单的库存模型的处理）虽然出现很早，但是只有到了20世纪40年代末期，由于计算机的兴起、复杂的管理体系和工程设计的出现，以及产品新陈代谢的加速，使得最优化方法既是时代的需要又有实际应用的可能性，这个领域才得到迅速的发展。同时，最优化的数学理论——最优化计算，也随之建立起来。

最优化计算包括线性规划、非线性规划及动态规划等几个方面的计算方法，其中又可分为无约束极值和约束极值两类。线性规划是理论成熟应用最广泛的部分，基本的算法是单纯形方法。由于实际问题一般都包含众多未知量，寻求快速算法是很迫切的问题，在这个方面，线性规划的多项式算法近几年来有很大进展。

3．数值逼近法

数值逼近法研究函数的离散逼近、数值微分、数值积分等。这部分与数值代数构成计算数学的基础部分。函数的离散逼近特别是各种方式的函数插值，是连续系统离散化的基本步骤。

逼近法就是近似代替，也就是用简单的函数$g(x)$去近似代替比较复杂的函数$f(x)$，或者代替不能用解析表达式表示的函数。

举例来说，在实验中我们观测到某种物体的长度和温度有一

定的函数关系，当温度是0℃的时候，长度是L_1，10℃的时候是L_2，20℃的时候是L_3，那么在0℃到20℃之间的任一温度的时候，物体的长度是多少呢？如果一点一点去测量是很麻烦的，因此，可以设法用一个函数$g(x)$去近似代替上述函数关系。这样就可以通过求任意一点上函数$g(x)$的值去近似代替所求点上原函数的值。这里函数$g(x)$一般是简单的函数，常常用多项式函数或者有理函数表示。

数值逼近的基本方法是插值法，插值法是指在离散数据的基础上补插出连续函数。是计算数学中最基本和常用的手段，是函数逼近的重要方法。利用它可通过函数在有限个点处的取值状况，估算该函数在别处的值。早在公元6世纪，中国刘焯(544～610)已将等距二次插值法用于天文计算。17世纪，牛顿和格雷果里建立了等距结点上的一般插值公式。18世纪，拉格朗日给出了更一般的非等距结点上的插值公式。在近代，插值法是观测数据处理和函数制表所常用的工具，又是导出其他许多值方法（例如数值积分、非线性方程求很、微分方程数值解等）的依据。

我们知道初等数学里的三角函数表、对数表有一项修正值，它就是根据插值法制成的。一般地，已知某个函数$y=f(x)$在x_0，x_1两点的函数值是y_1和y_2，而且区间(x_0, x_1)比较小，我们可以用直线P_0P_1来近似代替曲线$f(x)$。

直线P_0P_1的方程是：

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

就是

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

这样，我们可以取

$$g(x)=f(x)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

作为近似代替$f(x)$的函数，叫做插值函数，这里x_0，x_1是已知数。这种插值叫作线性插值法。

还有多项式插值即插值函数类取成代数多项式类的情形，是最常用的一种插值。在实用中很少采用高次多项式插值，因为在被插函数不够光滑或插值结点选择不当时，高次插值多项式常常在被插函数附近激烈地摆动，不能逼近被插函数，高次插值多项式常常将插值条件的数据中含有的误差过分地放大和扩散。因此，在实用中，往往是先将全区间分成许多小区间，然后在每个小区间上，采用低次插值（如一次、二次或三次插值），通常称这样的方法为分段插值法；样条插值即一种非局部性的分段插值。在每个分段点处相邻插值曲线段的衔接具有一定的光滑度。最常用的一种是三次多项式样条插值，等等。

4. 计算几何

计算几何是由函数逼近论、微分几何学，代数几何、计算数学等形成的新兴边缘学科，它研究几何外形信息的计算机表示、分析和综合。它是计算机辅助几何设计这门技术的数学基础。从20世纪60年代起，计算机辅助设计和辅助制造开始进入造船、航空和汽车工业的产品几何外形设计和制造领域中。设计者首先需要把一般的曲线或曲面的外形表示在计算机上，然后对这些曲线或曲面的几何性质进行分析，看曲线有无拐点、奇点，曲面是不是凸的，等等，最后提出一种有效的数值方法，由程序或由人机对话控制这些曲线和曲面的形状，使其符合设计要求。

在70年代，主要用的计算几何图形是：贝济埃曲线和曲面、B样条曲线和曲面、孔斯曲面等。

1962年起，法国雷诺汽车公司的工程师贝济埃以逼近为基础，开始研究参数曲线表示法，完成了一种自由型曲线和曲面的设计系统，并于1972年在雷诺汽车公司正式投入使用。

所以，计算几何就是研究静态或动态的几何形体及其视像的离散化、逼近与生成的计算方法。这是一个兴起较晚的新分支，但发展迅速，对于计算机制图、计算机辅助设计、计算机辅助制

造、计算机动画、计算机视像、机器人技术等众多领域都有重要的应用。

5．计算概率统计

又称概率统计计算，它是概率论、数理统计、计算数学和计算机科学等学科之间的一个交叉性、边缘性、应用性的学科分支，研究如何根据实际问题提出来的要求，利用概率论、数理统计中提供的概率统计模型，对试验观测数据或随机模拟数据进行统计分析处理，给出实际问题性质的统计描述、统计控制或统计预测的数值结果。

概率统计计算应用广泛，发展很快。研究的主要领域包括随机数据的统计分析计算、概率统计模型的随机模拟计算及它们在数字计算机上的程序包研制等三个相互关联的方面。

随机数据的统计分析计算。在计算机上，对实际问题中给出的一组试验观测数据或概率统计模型的随机模拟数据 x_1、x_2、……，x_n进行分析计算。这里，$x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})^T (i=1,2,\cdots\cdots n, m\geq 1)$，表示在第 i 次试验中或第 i 次模拟中得到的观测数据。可以是一个标量($n=1$)，也可以是一个向量($m>1$)。根据x_i含变量个数m的不同（$m=1$或 $m>1$）和各次观测模淑之间是否统计相关或相互独立，在分析计算时使用不同的概率统计模型和不同的概率统计算法。对各次观测或模拟间相互独立的随机数据，有一元($m=1$)和多元($m>1$)统计分析计算之分；对相关性的观测数据，有处理平稳随机数据的数字时间序列分析计算，处理突发随机事件的随机点过程计算，处理状态离散的马尔可夫链计算和处理各种观测系统的数字滤波计算等。

在概率统计模型的随机模拟计算中，随机抽样是一类经典方法。由于数字计算机的出现和发展，随机抽样作为一种算法在第二次世界大战之后得到了迅速发展，并在许多不同的领域中得到了广泛的应用。当时从事这一方法研究的物理学家，借用欧洲著名赌城蒙特卡罗的名字，给该法起名为蒙特卡罗法。蒙特卡罗法是计算机诞生后由冯·诺依曼与乌拉姆倡导的一类新型计算方法。

它将求解的数学问题（离散型或连续型）化为概率模型，在计算机上实现随机模拟，以获得近似解。这种方法的优点是：对于问题的几何形状不敏感，收敛速度与维数无关。因此它特别适应于很高维数的数学物理问题，如波耳兹曼方程、薛定谔方程等等。

和随机数据的统计分析计算不同，随机模拟计算利用实际系统的概率统计模型，通过模拟计算，"仿造"系统的试验观测数据，进而分析系统的渐近统计性质。在数字计算机上，随机模拟计算用系统模型的随机数字模拟代替实际系统的物理模拟，用伪随机数代替随机变量的真实抽样，这种双重模拟计算，为概率统计计算解决实际问题开辟了新的应用领域。

为方便用户在计算机上使用统计算法，已经研制为数众多的概率统计计算程序包，它们可提供完整配套的统计模型，快速可靠的算法，易于使用，便于移植和二次开发。

6．*数学物理方程的数值解法*

数学物理方程的数值解法研究把数理方程离散化和对离散方程求解以及有关的理论基础问题。数学物理方程的问题可以分为正演问题和反演问题两类。它们大量出现在物理、力学、地球物理等学科以及国民经济、国防的实际课题中。

正演问题是给定方程、再加上规定具体环境的定解条件，包括初始条件、边界条件等，由此求解以便定出因果关系和过程演化的定量特征，起着由因推果的作用。正演问题数值解法包括常微分方程、定常和非定常偏微分方程，积分方程等的数值解法。

微分方程的离散化主要有有限差分方法与有限元方法两大类。有限差分方法历史悠久，导源于牛顿、欧拉，它以差商代替微商，将微分方程离散化为差分方程。差分法简单通用，适用于任何类型的方程，又便于机器实现，在计算机诞生以后得到了很大的发展与推广应用。有限元方法是针对椭圆型方程边值问题的一个新的离散化方法，它基于等价的变分原理的形式，采取任意格网分片逼近的手段，把传统上对立的差分方法与里茨-加廖金变

分法有机结合起来，扬长抑短，发展成为解算定常问题的主导方法，并推广应用于非定常问题，也开辟了理论研究的新方向。有限元具有几何上灵活适应的突出优点，特别适合于解决复杂性大的问题，并便于机器实现，在工程设计中已应用。

反演问题是在给定方程的模式下，已知其解或解的某一部分，要求反推该方程的系数、源项或边界的形式等等，起着导果求因的作用，大凡为要探查不可达、不可触之处的形貌性态，就可提出适当的数学反演问题。70年代x光分层扫描计算机化构像的发展就是一个范例。在科学技术和工程实际中，特别在医疗卫生、无损探测、遥感遥测、地震勘探、地球物理等领域中存在着大量的反演问题等待解决，它们通常是不适定的、病态的、有其特殊的观点。这是一个正在开拓中的，理论和应用上都很重要的新领域。

1956年计算数学在我国开始发展，30多年来计算数学发展迅速，在计算数学的应用和基础研究上取得了许多重大成果，为国家解决了大量经济建设和国防建设中的重要科学计算课题，主要成就有：从20世纪60年代开始，中国核工业部第九研究院周毓麟等集体研究与完成了大量大型科学计算课题，为中国原子弹的研制成功、氢弹原理的突破和发展作出贡献；60年代初，中国科学院计算所冯康等人在大型水坝应力计算的基础上，独立于西方创立了有限元方法并最早奠定其理论基础；华罗庚，王元等对于高维数值积分的数论网格方法作出重要贡献。

第十四章　现代数学的新理论

20世纪60年代以来，数学获得了全面的发展，产生了许多新理论，如模糊数学、突变理论、分形几何学等，其应用越来越广泛，具有强大的生命力。

一、模糊数学

模糊数学是当代数学中的一门新兴学科，其应用越来越广泛。

1．模糊数学的产生

模糊数学是人们认识事物的精确性与模糊性相互关系的辅助工具。人类认识自然界在方法论上曾经过朴素整体综合法——传统分析法——科学综合法这样一个螺旋的上升轨道，与此相应，有人认为，数学方法中也包含了朴素模糊法——模确法——科学模糊法的辨证过程。

（1）人类认识的朴素模糊法。人类社会早期，生产力非常落后，人们的认识手段简陋、单一，只能凭借观察和直觉从宏观事物的整体性来考察整个世界，显示出对事物的笼统和模糊的认识。对两个以上的数量的认识，只掌握于多、许多和非常多等模糊概念，模糊是某种落后生产力的反映。

（2）人类认识的精确法。随着生产力的不断提高，人们的认识能力也不断地提高，有了总结和概括客观世界中数和形的数学。数学经历了常量数学、变量数学和随机数学的光辉历程，这通称为精确数学。长期以来，精确数学在描述自然界客观事物的运动变化规律中获得显著成就，人们从心中无数到心中有数，数学思维扬弃了模糊性，转入对事物的精确、清晰的描述。

（3）人类认识的科学模糊法。客观世界中存在着大量的模糊现象，以认识方面说，模糊性是指概念外延的不确定性所造成的判

断的不确定性。人们在日常生活中经常遇到模糊事物，没有分明的数量界限，便使用一些模糊的词句。例如，"比较年轻"、"大高个子"、"大胖子"、"好像很瘦"、"差不多"、"好极了"、"美"、"丑"、"善"、"恶"，等等。在工作中往往也碰到许多模糊的东西，例如，要确定一炉钢水是否已经炼好，除了要知道钢水温度、成分比例和冶炼时间等精确信息以外，还需要参考钢水颜色、沸腾情况等模糊信息。所以，除了要有涉及误差计算数学之外，还需要模糊数学。

随着计算机科学、控制科学、系统科学的迅速发展，特别是电子计算机的智能化，模糊数学的重要性更为明显。研究人类系统的行为，或者处理可与人类系统行为相比拟的复杂系统，如航天系统、人脑系统、社会系统等，都需要解决参数和变量甚多，各种因素相互交错，系统复杂，模糊性很明显等难题，都要用模糊数学。

人与电子计算机相比，一般说来，人脑具有处理模糊信息的能力，善于判断和处理模糊现象。维纳说："人具有运用模糊概念的能力"。一个经验丰富的医生能依靠模糊的信息妙手回春，公安人员能依靠蛛丝马迹的模糊线索侦察破案等，但电子计算机对模糊现象识别能力却很差。例如，要判断对面走过来的人是谁？只要是过去见过面的，我们就能通过观察走过来的人的高矮、体型、脸型、面部特征、走路姿势，作出正确判断。如果这件事由电子计算机来判断，就复杂多了。电子计算机在第一次与这个人见面时，就要把这个人的身高、体重、体型、脸型、面部轮廓的曲率、眼睛的大小、眉毛的长短、走路时手摆动的角度等测出上百个参数，甚至精确到小数点以后几十位才罢休。在判断他是谁时，要再把这些参数重测一遍，如果这次测量的参数和上一次测量的参数相同，才能作出正确判断。如果其中有些参数变了，人瘦了，发型变了，面型变了等，它就会闹出翻脸不认人的笑话来。现在为了提高计算机识别模糊现象的能力，需要把人们日常用的模糊语言设计成机器能接受的指令和程序，使机器也能象人

脑那样简捷灵活地做出相应的判断，提高自动识别和控制模糊现象的效率。为了寻找一种描述和加工模糊信息的数学工作，数学家们进行了大量研究，发展了模糊数学。

2．模糊数学的研究内容

1965年，美国数学家扎德（L.A.Zadch）提出模糊性数学，它的研究内容主要有以下三方面：

第一，研究模糊数学的理论以及它和精确数学、随机数学的关系。

扎德以精确数学集合论为基础，并考虑到数学的集合概念进行修改和推广。他提出用“模糊集合”作为表现模糊事物的数学模型，并在“模糊集合”上逐步建立运算、变换规律，开展有关的理论研究，构造出研究现实世界中的大量模糊现象的数学模型，提出了能够对看来相当复杂的模糊系统进行定量的描述和处理的数学方法。

19世纪末康托尔提出经典集合论，他研究客观世界及其运动的各个层次和各种事物，按其属性或关系的区分，运用数学“集合”概念加以聚类、概括；还研究集合的整体结构关系和运算规律。集合论标志着数学理论不仅能从变化发展上描写物质运动和过程，而且已经从有机整体联系上描述事物之间的关系和结构。集合论标志着数学辩证思维方法进入了整体综合研究的新时代。但是，经典集合论描述的对象属性和关系，都是具有明显差异和固定界限的集合关系，具有绝对属于或不属于的特点。在数学中，把具有某些属性的事物的全体称为“集”或“集合”，组成集合的每个事物叫做该集合的元素。例如，太阳系的行星、某个工厂的工人、某个房间的所有物品等都是集合。地球是太阳系行星集合中的一个元素，在普通集合中，元素对集合的关系，或者“属于”，或者“不属于”，二者必居其一。模糊集合中，在给定范围内，元素对它的隶属关系不一定只有“是”与“否”二种极端情况，而是用介于“0”和“1”之间的实数来表示隶属程度，还存在中间过渡状态。如一个元素x可以按照一定的隶属程度（记作d）隶属于集

合A，当$d=1$，便是x属于A；当$d=0$，便是x不属于A．当$d=0.7$，表示x"七成属于A而三成不属于A"。亦即用介于0和1之间的实数来表示隶属程度。扎德认为，指明各个元素x的隶属程度，就等于指定了一个集合。当其中某些元素的隶属度为0与1之间的值时，这是模糊集合。

模糊性数学是以经典集合论为基础的。模糊性数学和随机数学都是直接以不确定性为对象的数学理论。它们彼此联系又相互区别。模糊集合的隶属函数与随机数学的概率函数都取0到1之间的实数，而且前者有时甚至直接取值于后者的统计数据。但是，它们又有区别，概率论描述的是事物发展中的多因果性，依靠的是对大数现象的统计性观察，从中求出比例分布，使随机性（偶然性）转化为必然性的数学方法，它抓住的是信息输入量的不确定性。模糊数学刻划的是事物类属边界和性态问题，依靠的是某物对某类集合隶属程度的渐近分析，揭示事物的可能性分布。使模糊性转化为精确的方法，它抓住的是信息语义质的不确定性。

第二，研究模糊语言学和模糊逻辑。

人类自然语言具有模糊性，人们经常接受模糊语言与模糊信息，并能作出正确的识别和判断。为了实现用自然语言跟电子计算机进行直接对话，就必须把人类的语言和思维过程提炼成数学模型，才能给电子计算机输入指令。这样，建立合适的模糊性数学模型就成为运用数学方法的关键。扎德采用模糊集合理论来建立模糊语言的数学模型，使人类语言数量化、形式化，如果我们把合乎语法的标准句子的从属函数值定作1，那么，其它文法稍有错误，但尚能表达相仿的思想句子，就可以用0到1之间的连续函数来表征它从属"正确句子"的隶属程度。例如，u_T（我要吃饭）=1；u_T（我饭要吃）=0.3；u_T（要吃饭我）=0.4；u_T（饭饭）=0.5；u_T（饭要吃我）=1；u_T（饭我要吃）=0.9。这样，就把模糊语言进行定量描述，并定出一套运算变换规则。目前，模糊语言已引起语言学家们的浓厚兴趣，美国著名语言学家拉科夫说，模糊性即将成为语言学的一个主要的研究领域，对语言学的发展将

产生多方面的深刻影响。

人们的思维活动，常常要求概念的确定性和精确性，采用形式逻辑的非真即假的二值(用 0 与 1 来刻划其真假)表示，然后进行判断和推理，得出正确的结论。现有的电子计算机都是建立在二值逻辑基础上的，它在处理客观事物的确定性方面，发挥了巨大的作用，但是却不具备处理事物和概念的不确定性或模糊性的能力。为了使电子计算机能够模拟人脑高级智能特点，就必须把计算机转到多值逻辑基础上，就需要研究模糊逻辑。扎德设计出模糊逻辑，它对模糊命题的真值不能简单地只用 0 和 1 来刻划其真假，而是以 0 到 1 之间连续取值，并运用一套模糊函数公式与模糊演绎推理规则。模糊逻辑是二值逻辑的直接推广，是在多值逻辑基础上对模糊事物给以定量的描述。拿假言推理来说，若大前题为已知命题A蕴含着B，而小前提为A，则可得出结论为B，这种推理，只要前提是真实的，推理正确，其结论必然正确。当A和B均为模糊命题，形式逻辑就无能为力了。为此，扎德在模糊集合论基础上设计出一种模糊逻辑的近似性推理形式。其规则是：

如果刮大风则降温：　　大提前：$A \to B$

现在刮风特大：　　小提前 A_1

所以，降温大约特大　　结论：B_1

又例如，人们认为，苹果红了则熟了（$A \to B$）。现在，这苹果有点红（A_1），那么这苹果有点熟（B_1），彼此界限模糊，而且大前提中红和熟之间也只反映一种事物条件和结果的模糊关系。

第三，研究模糊数学的应用。

模糊数学发展的主流是在它的应用方面。既然模糊性概念已经找到了模糊集的刻画方式，那么人类运用概念进行判断、评价、推理、规划、决策和控制的过程也可以用模糊数学的方法来逐步刻画。例如，"模糊聚类分析"给出利用模糊关系来对事物进行模糊性划分的方法；"模糊模式识别"给出了模糊性事物的识别方法；"模糊综合评判"在多因素场合给出了对事物进行评定的方法；"模糊规划"给出了模糊性限制条件下的规划模型与解法；"模

糊决策”给出了多目标情形下能反映决策者意志与经验的决策方法；“模糊控制”给出了当精确数学模型难以建立而又有人的实际控制经验可以采纳时的模糊性系统控制方法。这些方法构成了一种模糊性系统理论，构成了一种思辨数学的雏形。这些方法已开始在各个领域中获得应用。

模糊数学是以不确定的事物为其研究对象。模糊集合的出现是数学为了描述复杂事物的需要，扎德的功绩在于用模糊集合的理论找到处理模糊性对象的途径，从而使研究确定性对象的数学与不确定性对象的数学沟通起来。过去精确数学、随机数学描述现实感到不足之处，就能得到弥补。这样，在数学的发展过程中，它们之间相互联系、相互补充，可以更确切地描述现实世界的数量关系。在模糊数学中，目前已有模糊拓朴学、模糊群论、模糊图论、模糊概率、模糊语言学、模糊逻辑学等分支，整个模糊数学的理论还在继续发展。

3．模糊数学的应用

模糊数学已经在医学、气象、结构力学、心理、经济管理、计量、石油、地质、环境、生物、农业、林业、化工、纺织、语言、控制、遥感、雷达、教育、体育等方面有了应用。在气象、结构力学、控制、心理等方面已有具体的研究成果。说明模糊数学是这些领域中的一项重要的数学工具。如1974年，国外利用模糊控制技术制成模糊控制器，并在实验中获得成功。随后，人们对不同的复杂控制对象，如炼钢炉、水泥窑和热水厂等进行了模糊控制器的实验研究，制成的模糊控制器结构简单、适应性强，效果好。它能控制非线性系统，对参数的变化有较强的适应性。我国同济大学设计制造一个混凝土搅拌的模糊控制器，清华大学、上海工业大学着手进行模糊控制器的研究工作。然而，模糊数学最重要的应用领域是计算机智能，它已经被运用于专家系统和知识工程等方面。不少人认为它与新一代计算机的研制有紧密的联系，目前，世界上发达国家正积极试制智能化的模糊计算机，1986年日本山川烈博士首次试制成功模糊推理机（是模糊计

算机的雏型），它的推理运算速度为1000万次/秒。1988年在我国汪培庄教授指导下已试制成功第二台模糊推理机分立元件样机，它的推理运算速度为 1500 万次/秒，这是我国在突破模糊信息处理难关方面迈出的重要一步，是新一代计算机研制和开发的一项高技术成果。

二、突变理论

20世纪70年代还出现了突变理论这一新的学科，已引起数学界的关注。

1．突变理论的产生

许多年来，自然界许多事物的连续的、渐变的、平滑的运动变化过程，都可以用微积分的方法给以圆满地解决。例如，地球绕太阳旋转，有规律地周而复始地连续不断进行，使人们能极其精确地预测未来的运动状态，这可以运用经典的微积分来描述。但是，大自然的物质结构在空间分布和时间延续上存在着许多的分界线和关节点，如从星云到星球，那个分离的界面是怎样产生的？从无机到有机的机制是如何获得的？从猿到人，第一把石斧的图象是如何构思的？这些都可以看作是事物及其运动的分水岭、转折线、突变点上的问题。在自然界和社会现象中，还有许多突变和飞跃的过程，飞跃造成的不连续性把系统的行为空间变成不可微的，微积分也无法解决。例如，水突然沸腾，冰突然溶化，火山爆发，某地突然地震，房屋突然倒塌，病人突然死亡，蝗虫急速繁殖，等等。这种由渐变、量变发展为突变、质变的过程，微积分是不能描述的。那么，有没有可能建立一种关于突变现象的一般性数学理论来描述各种飞跃和不连续过程呢？这迫使数学家进一步研究描述突变的飞跃过程，研究不连续现象的数学理论。1972年法国数学家、菲尔茨奖获得者雷内·托姆（Rene Thom）在《结构的稳定性和形态发生学》一书中，明确地阐明了突变理论，宣告了突变理论的诞生。

突变理论的原意是指突然发生的灾难性变化。英国著名数学

家齐曼教授认为，微积分可以解释自然界中的连续变化过程，然而对于突然变化的自然现象，是很不够用的，托姆的突变理论却能解释自然界中不连续的突变过程。齐曼称突变理论是"数学界的一次智力革命——微积分以后最重要的发现"。他还组成一个研究团体，悉心钻研，扩展应用，短短几年，论文已有400多篇，可称为一时之盛。

2．突变理论的内容

突变理论主要以拓扑学、分析代数等为工具，以结构稳定性理论为基础，提出了一条新的判别突变、飞跃的原则：在严格控制条件下，如果质变中经历的中间过渡态是稳定的，那么它就是一个渐变过程。如拆一堵墙，如果从上面开始一块块地把砖头拆下来，整个过程都是结构稳定的渐变过程。如果从墙底开始拆墙，拆到一定程度，就会破坏墙的结构稳定性，墙就会哗啦一声倒塌下来。这种结构不稳定性就是突变、飞跃过程。突变理论用势函数的洼存在表示稳定，势函数的洼消失表示不稳定，有一套运算方法。例如，一个小球在洼底部时是稳定的，在突起顶端部是不稳定的，会从顶端处滚下去，往新洼底过渡，事物就发生突变。小球到了新洼底处后，又开始新的稳定。所以，势函数的洼存在与消失是判断事物的稳定性与不稳定性、渐变与突变过程的数学依据。

托姆的突变理论，就是用数学工具描述系统状态的飞跃，给出系统处于稳定态的参数区域，以及系统处于不稳定状态时的参数区域。参数变化时，系统状态也随着变化，当参数通过某些特定位置时，状态就会出现突变。突变理论提出一系列数学模型，用以解释自然界和社会现象中所发生的不连续的变化过程，描述各种现象如何从一种形式突然地飞跃到根本不同的另一种形式。如岩石的破裂，桥梁的断塌，细胞的分裂，胚胎的变异，市场的破坏以及社会结构的激变，等等。

按照突变理论，自然界和社会现象中的大量的不连续事件，可以由某种特定的几何形式来表示。托姆指出，发生在三维空间

和一维时间的四个因子控制下的突变，有七种突变类型：折叠突变、尖顶突变、燕尾突变、蝴蝶突变、双曲脐型突变、椭圆脐型突变以及抛物脐型突变等，每一种突变都与一个势函数相联系。

水的气液相变过程，可用尖顶突变模型来描述，（见图14-1）。图中ρ轴表示密度，P轴表示压力，T轴表示温度，曲面上的每一个点表示水的密度状态，顶叶和底叶表示密度的稳定状态（即液态和气态），中间叶表示密度的不稳定状态（即似水非水，似气非气状态），三叶的汇合点Q表示临界点所对应的密度，曲面总趋势由高往底倾斜，说明随着温度增高，压力降低，水由高密度的液态变为低密度的气态。

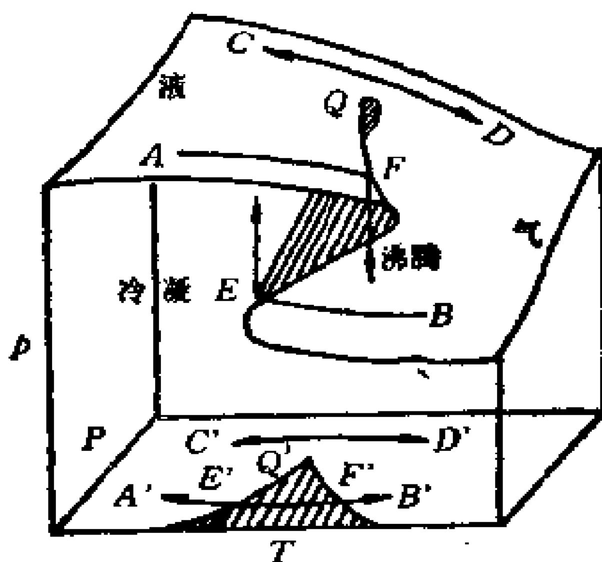


图 14-1

从这个突变模型我们可以看到，水从液态变为气态，或从气态变为液态，可以通过两种方式：一种是当温度压力沿着AFB方向变化时。起初，在AF阶段，随着温度升高压力降低，水的密度值沿着上叶连续下降，但还保持在高密度液态区，而到了折叠的边缘F点，上叶突然中断，水的密度值一下子跌到下叶，即从液态落到气态区，发生一种不连续的突变。即水加热到100℃沸腾，变为水蒸气的过程。另一种是当温度压力沿着CD方向变化时，水的密度值随着温度升高压力降低而逐渐下降，它经由一系列似水非水，似气非气的中间状态连续地变化为气态。即相当一杯与空气接触的水逐渐挥发，变成水蒸气的过程。

这两种方式也适用于气态转变为液态的过程。气态转变为液态可以分别通过BEA的飞跃和DC的渐变方式来进行。不过，以飞跃方式进行时，飞跃的关节点是E，密度值是在E点一下子由

下叶跳到上叶，即由气态区上升到液态区，这就是冷凝过程。

例如，用大拇指和中指夹持一段有弹性的钢丝，使其向上弯曲，然后用力压钢丝使其变形，继续加大外力，当达到一定程度时，钢丝就会突然向下弯曲，这是生活中常见的一种突变现象。它有两个稳定状态：上弯和下弯，状态由两个参数所决定，一是手指夹持的力（水平方向），一是对钢丝的压力（垂直方向），可用尖顶型来描述。氢氧化物的水溶液有3种基本性质：（1）强酸性；（2）强碱性；（3）不电离。显然，只要选择适当的控制变量，在控制平面上这些性质的中介状态，即弱碱、弱酸和两性区的分布均可应用蝴蝶突变模型描述。尖顶突变型和蝴蝶突变型定几种质态之间能够可逆转化的模型。自然界还有些过程是不可逆的，比如死亡是一种突变，活人可以变为死人，反过来却不行。这一类过程可以用折叠突变型、燕尾突变型等势函数最高奇次的模型来描述，（见图14-2）。

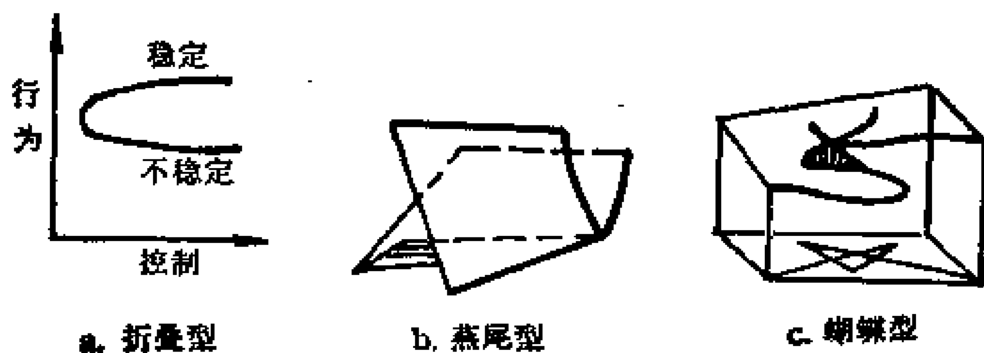


图 14-2

突变理论阐明了自然界发生的质变可以通过二种方式来实现，质变可以通过突变方式来实现，也可以通过渐变方式来实现，并给出了实现这两种方式的条件和范围，还说明突变方式和渐变方式二者之间没有绝对的鸿沟。它们相互联系，在一定情况下质变的突变方式和渐变方式之间可以相互转化。这说明客观事物的质变的关节点是一个过渡区或折迭区，而不仅仅是一个点而已。水液态转化为气态是尖顶型（见图14-3）。如果控制曲线AB穿过折迭区，当温度升高到100°C，压力降低，水的密度小，发

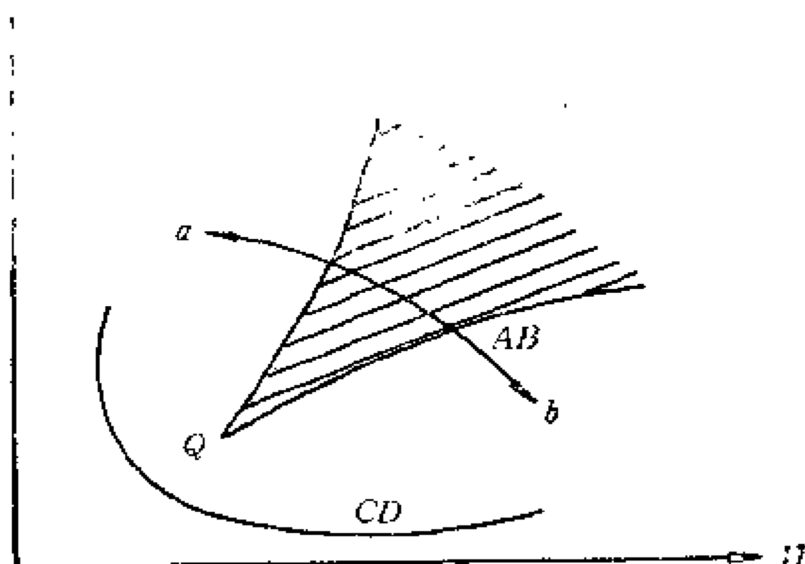


图 14-3

生了不连续，水处于不稳定状态，就会沸腾，就是突变。如果控制曲线沿CD方向，绕过折迭区临界点Q，水就能够不经过沸腾而由一系列水、气之间的过渡状态转化为气。在常压下，当温度处于0～100°C之间时，液相密度完全由温度控制，水的变化是渐变，水处于稳定状态中。所以，折迭区的存在是区分两种质变形式的根本界限，而它的存在是在数学上得到严格证明的。控制一个质变按突变方式进行还是按渐变方式进行，完全取决于如何控制条件的变化。尽管变化的起点相同，结果也相同，条件沿AB方向变化就发生突变，条件沿CD方向变化就发生渐变。只要改变控制条件，就能使渐变转化为突变，或使突变转化为渐变。所以，突变理论是用形象而精确的数学模型来描述质量互变过程。

3　突变理论的应用

突变理论在自然科学中有广泛应用。在物理学中它被用于研究相变、分叉、混沌与突变的关系，提出动态系统、非线性力学系统的突变模型，解释物理过程的可重复性是结构稳定性的表现。在化学中，用蝴蝶型描述氢氧化物的水溶液，用尖顶型描述

水的液、气、固的变化等。在生态学中研究了生物群的消长与生灭过程，提出了根治蝗虫的模型与方法。在医学中，我国辽宁一位中医，用尖顶突变型描述中医阴阳理论，获得一些成果。在大气科学中证明了环境参数的改变能引起大气运动的多量平衡态的突变型相互转换。在地震科学研究中，探讨了岩体准静态运动失稳的尖顶突变模型，研究了地震的孕育过程与发震机制。

突变理论在工程技术中的应用。研究了弹性结构的稳定性，通过桥梁过载导致毁坏的实际过程，提出最优结构设计。还可用突变理论研究炸弹爆炸的机理、船舶的稳定性。例如，1980年10月7日，我国广州远洋运输公司的"西江号"货船，在日本都井岬海域遇到狂风，船体剧烈摇摆之后突然倾覆遇难。通过应用突变理论分析，发现在船的稳心处存在一个尖顶突变，而当船舶超载（或处于海浪的波峰）时，倾覆可能性增加是由燕尾突变引起的。

突变理论在社会现象的应用归结为某种量的突变问题，人们施加控制因素影响社会状态是有一定条件的。只有在控制因素达到临界点之前，状态才是可以控制的，一旦带根本性的质变发生，它就表现为无法控制的突变过程。用突变理论对社会进行高层次的有效控制，需要研究事物状态与控制因素之间的关系，以及稳定区、非稳定区域、临界曲线的分布特点，还要研究突变的方向与幅度。这种控制有如下特征：

（1）是由稳定状态控制变为超稳定状态控制。通常的控制都是追求与保持某一稳定态，超稳定控制则是寻找通过某种非稳定态到稳定态的突变，达到新的更高级的稳定态。有魄力的领导者敢于放手使系统进入超稳定态，破坏旧的稳定秩序进入一个非稳定态，通过突变达到新的更高级的稳定态。改革就是超稳定控制。

（2）由状态控制变为演化过程控制。通常的控制只是从当前的效果出发，是静态的控制。而演化过程控制的目标则是使状态按人们所希望的演化过程与演化方向变化，是动态的，高瞻远瞩

的全过程控制。例如，价格调整实施，就不仅要考虑到当前的经济平衡，而且要充分考虑到由此发端的状态突变及整个演化过程造成的经济效果。

（3）由消极控制变为积极控制。通常的控制因素之所以只能实现稳定控制、状态控制，原因就在于将受控系统当作消极、被动因素。积极控制则不仅考虑外部控制因素，而且也把受控系统内部因素当作高层次的控制因素。

（4）由单调控制变为迂回控制。通常的控制都是单调变动控制，尽管这种控制的主观愿望是使状态沿最短路径接近目标，但它会因急于求成而适得其反。迂回控制是灵活地调动包括内部因素在内的控制因素，有进有退、有增有减，使状态变化巧妙地沿着迂回的路径，达到所希望的突变临界值。

三、分形几何学

普通几何学研究的对象具有整数维数，如零维的点、一维的线、二维的面、三维的立体、乃至四维"时空"。最近十几年，产生了新兴的分形几何学，空间具有不一定是整数的维，而是一个分数维数，这是几何学的新突破，引起数学家和自然科学工作者的极大关注。

1、分形几何学的产生

首先，自然界中许多事物，存在着复杂的无规则的、不光滑的、不可微的现象，它们没有特征长度，但又具有自相似的"层次"结构，在理想情况下，甚至是无穷多层次。适当地放大或缩小几何尺寸，整个结构并不改变。不少复杂的物理现象，背后是反映这类层次结构的分形几何学。如连绵的山峰、蜿蜒的河流，曲折的海岸线、星云的分布，地震，湍流，凝聚体，相变等都具有自相似性。

客观事物有它自己的特征长度，要用恰当的尺去测量。用尺来量万里长城，又嫌太短，用尺来测大肠杆菌，又嫌太长，从而产生特征尺度。在建立和求解数学模型，试图定量地描述自然现

象时，抓住特征尺度是关键环节，一个好的模型，往往要涉及三个层次，一个由特征尺度决定的基本层次，更大尺度的环境用“平均场”，决定外力的“位势”等等替代，而更小尺度上的相互作用，化成了摩擦系数、扩散系数这些通常取自实验的“常数”。如果要从理论上推算摩擦或扩散系数，那就必须转入更细的层次，从物质运动的更为微观的图像出发。看准了特征尺度，问题就比较容易解决。

还有许多事物存在着无规则的现象，它没有特征尺度，就必须同时考虑从小到大的许许多多尺度（或者叫“标度”），这叫作“无标度性”的问题。如物理学中的湍流，湍流是自然界中普遍现象，小至静室中缭绕的青烟，大至木星大气中的涡流，都是十分紊乱的流体运动。流体宏观运动的能量，经过大、中、小、微等许许多多尺度上的旋涡，最后转化成分子尺度上的热运动。同时涉及大量不同尺度的运动状态，就需要借助“无标度性”解决问题，湍流中高旋涡区域，就需要用分形几何学。

法国数学家曼德尔勃罗特（B.B.Mandel brot，1924～ ）在他的著作中探讨了英国的海岸线有多长？这就要依赖测量时所使用的尺度，如果用公里作测量单位，从几米到几十米的一些曲折会被忽略。改用米来作单位，测得的总长度会增加，但是一些厘米量级以下就不能反映出来。由于涨潮落潮使海岸线的水陆分界线具有各种层次的不规则性。海岸线在大小两个方向都有自然的限制，取不列颠岛外缘上几个突出点，用直线把它们连起来，得到海岸线长度的一种下界。使用比这些直线段更长的尺度是没有意义的。还有海沙石的最小尺度是原子和分子，使用更小的尺度也是没有意义的。在这两个自然限度之间，存在着可以变化许多个数量级的“无标度”区。长度不是海岸线的定量特征，就要用分数维。后来，数学家寇赫从一个正方形的“岛”出发，始终保持面积不变，把它的“海岸线”变成无限曲线，其总长度也不断增加，趋向无穷大。实际上，分数维才是寇赫岛海岸线的确切的特征量。海岸线分数维均介于1到2之间。

这些自然现象，特别是物理现象和分形有密切联系，银河系中的若断若续的星体分布，它具有分数维的吸引子。多孔介质中的流体运动和由之产生的渗流模型，都是分形的研究对象，促使数学家深入研究，从而产生了分形几何。

第二，电子计算机图形显示协助人们推开了分形的大门，这座具有无穷层次结构的宏伟建筑，每一个角落里都存在无限嵌套的迷宫和回廊，促使科学家和数学家深入钻研。

第三，从数学史看，为分形理论孕育和诞生做出过重要贡献的有：康托尔、皮亚诺、勒贝格、豪斯多夫（Felix Hausdorff, 868～1942，德国数学家）、科赫等卓越的数学家。但是，法国数学家曼德尔勃罗特既精通计算机又精通数学，他在继承前辈研究成果基础上，于1975、1977和1982年先后用法文和英文出版了三本书，特别是《分形——形、机遇和维数》以及《自然界中的分形几何学》，开创了新的数学分支——分形几何学。

2. 分形几何学的内容

分形几何学的基本思想是：客观事物具有自相似的"层次"结构，局部与整体在形态、功能、信息、时间、空间等方面具有统计意义上的相似性，称为自相似性。分形的自相似性，即在通常的几何变换下，分形具有不变性。分形除了本身的大小外，不存在能表示其内部构造的特征长度。最初，曼德尔勃罗特把分形定义为"豪斯多夫维数严格大于拓扑维数的集合"。为了避免这一定义的浓厚的数学味道，他在1986年又给出定义："其组成部分与整体以某种方式相似的'形'叫作分形"。也就是说，分形是指一类极其破碎面复杂，但有其自相似或自仿射性的体系。分维是定量描述分形的重要参数。在分形的自相似性概念中，把在形态或结构上存在自相似性的几何对象称为分形。研究这种分形的科学称为分形几何学。

维数是几何对象的一个重要特征量。它是为确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标数目。在欧氏空间中，地图上的点有经纬两个坐标，一只集装箱有长、宽、高三个尺寸，它们分别

是二维和三维的几何对象。对于更抽象或复杂的对象，只要在每个局部可以和欧氏空间对应，也容易确定维数。即使把这样的几何对象连续地拉伸、压缩、扭曲，维数也不会改变，这就是拓扑维数，以后用字母d表示。

维数和测量有密切关系，为了测量一块平面图形的面积，可以用一个边长为l、面积为l^2的"标准"方块去覆盖它。所得的方块数目就是它的面积（以l^2为单位）：

$$\frac{\text{平面图形面积}}{l^2}=\text{有限数}=\text{面积。}$$

如果用标准长度l去测面积，那就会得到无穷大：

$$\frac{\text{平面图形面积}}{l}=\infty\text{。}$$

相反，用标准立体l^3去测量没有体积的平面，结果是零：

$$\frac{\text{平面图形面积}}{l^3}=0\text{。}$$

我们看到，用n维的标准体l^n去测量某个几何对象时，只有n与拓扑维d一致时，才能得到有限的结果。如果$n<d$，结果是∞。如果$n>d$，则得到0。这个简单的观察，以后要推广来定义更普遍的维数。

现在换一种方式来考虑问题，把一个正方形的每个边长增加为原来的3倍，得到一个大正方形，它正好等于$3^2=9$个原来的正方形。类似地，把一个正方体的每个边长增加为原来的3倍，就得到$3^3=27$个原来大小的立方体。推而广之，一个d维几何对象的每个独立方向，都增加为原来的l倍，结果得到N个原来的对象。这三个数之间的关系是$l^d=N$。现在把这个关系式两面取对数，写成

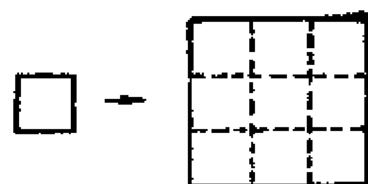
$$d=\frac{\ln N}{\ln l}$$

我们就完成了一次"飞跃"，d不再是整数。以后把这样推广定义

的维数称为分维，用大写字母记为D，（见图14-4）。

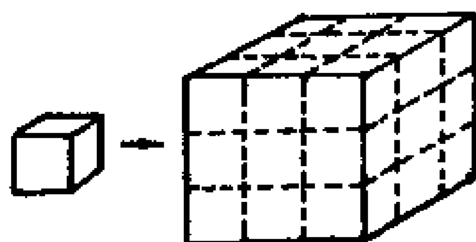
例如，取(0，1）线段三等分之后舍去中段，剩下的每段再三等分舍去中段，……如此无限次划分和舍去，最后的极限是无穷多个点的集合，这就是一种康托尔集合，（见图14-5）。其拓扑维数$d=0$。去掉原图的第一行，再取剩下图形的左半部分作为一个对象，把尺寸放大$l=3$倍，就得到$N=2$个原来的图形。套用公式算得它的分维是：

$$D_0=\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.630920\cdots\cdots$$



$d=2\quad l=3\quad N=3^2=9$

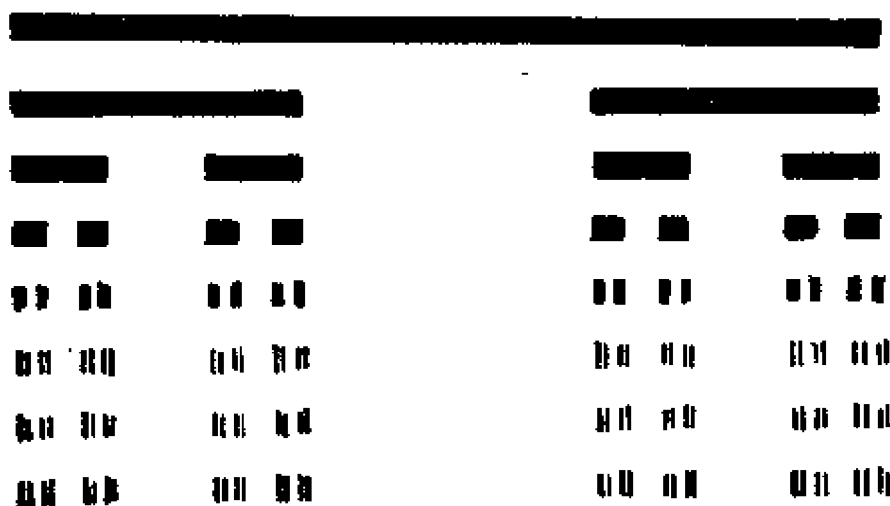
$D_0=\frac{\ln 9}{\ln 3}=2=d$



$d=3\quad l=3\quad N=3^3=27$

$D_0=\frac{\ln 27}{\ln 3}=3=d$

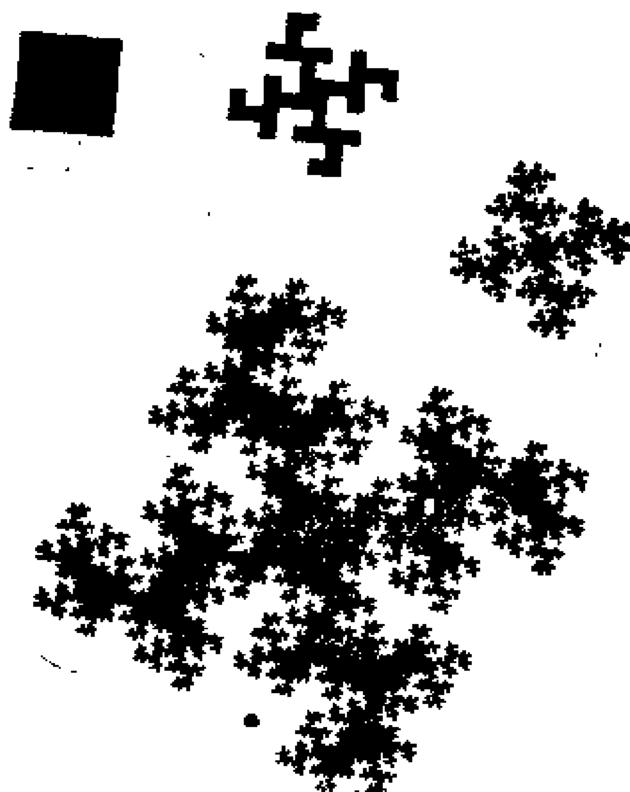
图 14-4



$$D_0=\frac{\ln 2}{\ln 3}=0.630929\cdots$$

图 14-5

又如，这是一种寇赫岛，（见图14-6），最初始的正方形每边长都取为1，作为基本的单元。第二个图形的最小构成单位是边长为1/6的正方形（因此不难看出，该图形海岸线的长度为1/6的72倍），只要把边长放大6倍，即$l=6$，它才是我们的基本单元。



$D_0=\frac{\ln 18}{\ln 6}=1.613147\cdots$

图 14-6

此时由72个小单元组成的海岸线的长度也成为72。于是，与此对应的初始正方形的每边变成为 N＝72/4＝18个。考察作图方法，可以看出每前进一步，l和N都按同样的倍数变。这样算得的寇赫岛海岸线的分维是：

$$D_0=\frac{\ln 18}{\ln 6}=1.613147\cdots\cdots。$$

所以，康托尔集合和寇赫岛，它们的分形都具有无穷自相似的层次，遵从比较简单的构造规则，是典型的构造简单的分维。

对于规整的几何对象，可以使用统一的长度变换倍数l。然而，分形并不限于规整对象。在海岸线长度中，总长度与所使用的测量单位有关系。为了测得精确一些，我们不是把尺寸放大为原来的l倍，而是把测量单位缩小为原来的ε倍，其实$l=1/\varepsilon$，只有不断缩小ε，才能使结果精益求精，测得的长度$N(\varepsilon)$也随着ε减小而增大。分数维定义中的N和l，要换成$N(\varepsilon)$和$1/\varepsilon$，而且

要看ε不断缩小时有没有极限存在，于是

$$C=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

这里写了字母C，是因为严格说来，它只是康托尔集合等"奇怪集合"的"容量"。为了使它成为维数，我们还要仿照前面用长度、面积、体积覆盖平面图形，分别得到∞、有限数和0的办法，把C的数值上下调整一番。如果能存在一个数D_0，当$C<D_0$时$N(\varepsilon)\varepsilon^{\bullet}$趋近无穷大，$C>D_0$时$N(\varepsilon)\varepsilon^{0}$趋近零，$C=D_0$时$N(\varepsilon)\varepsilon^{\circ}$趋向有限数，这样的$D_0$才是相应"奇怪集合"的分数维。它又叫作豪斯多夫维数，因为这基本上就是豪斯多夫早在1919年引入的维数定义。在多数实际问题中，可以不管容量和豪斯多夫维数的细致差别，一律称之为分数维。

3．分形几何学的应用

分形几何已在自然界与物理学中得到应用，如在显微镜下观察落入液体中的一粒花粉，会看到它不间断地做无规则运动，这是花粉在大量液体分子的无规则碰撞（每秒钟多达10^{15}次）下表现的平均行为。布朗粒子的轨道，由各种尺寸的线连成。只要有足够高的分辨力，就可以发现原以为是直线段的部分，其实由大量更小尺度的折线连成。这是一种处处连续，但又处处无导数的曲线。这种布朗粒子轨迹的分数维D_0等于2，大大高于它的拓扑维数$d=1$，这是一种分形。顺便指出，只要大于拓扑维、分数维虽取整数值，它仍是分维。

在某些电化学反应中，电极附近沉积的固态物质，以不规则的树枝形态向外增长。受到污染的一些水流中，粘在藻类植物上的颗粒和胶状物，不断因新的沉积而生长，成为带有许多须须毛毛的枝条态，就可用分维。

自然界中更大的尺度上也存在分形对象。一枝粗干可以分出不规则的枝杈，每个枝杈继续分为细杈，……至少有十几次分杈的层次，可用分形几何去测算，就得到1和2之间的分维。

有人研究了某些云彩边界的几何性质，发现存在从1公里到

1000公里的无标度区。小于1公里的云朵，更受地形地貌影响，大于1000公里时，地球曲率开始起作用。大小两端都受到一定的特征尺度限制，中间有三个数量级的无标度区，这已经足够宽了。分形就存在这中间区域，实际测出的分数维D_0大约是1.35。

近几年在流体力学不稳定性、光学双稳器件、化学振荡反应、等离子体中波的相互作用等现象的非线性微分方程，往往包含着两种对立的因素。一方面，从局部看，存在不稳定的运动模式，使得某一时刻靠得很近的两条轨道，在下一时刻就迅速离开。另一方面，保守系统的相体积不变，耗散系统的相体积要缩小，运动轨迹不能跑到千里之外，这是一种整体性的稳定因素。把这两种对立倾向调和的办法，就是运动轨迹要无穷无尽地扭曲和折迭。在保守情况下，这就导致随机的轨道分布，而在耗散情况下，形成"混沌吸引子"。混沌吸引子是系统总体稳定性和局部不稳定性共同作用的产物。混沌吸引子是一种分形，它无穷次折迭使混沌吸引子具有嵌套的自相似结构和非整数的维数。如伊侬吸引子，是最早发现的一种混沌吸引子，图14-7(A)那样类似田径跑道的弯月图形，它是1万次迭代的结果。图14-7(B)~(D)，依次是前一图内小方框中图形的放大。可以看出，在不同放大倍数下的图形，结构上是相似的。弯月形的依侬吸引子，是由不同层次的"线结构"组成的，这些线称为轨线。这种由不同层次的轨线构成的自相似性结构的混沌吸引子，它是一种分形，经计算它的分维$D_0\approx 1.26$。

在化学中，高分子又称大分子，大分子链是一条随机分形曲线，从大分子链本身的结构来看，可分为线型链，支化链和网状链。以树作比喻，线型链就是没有树枝的树干；支化链就是有大大小小树枝的树；网状链就好像各棵树的树枝之间发生了联结，从而形成了一个网状整体。在大分子链中，我们还可以划分出"链段"。链段往往包含着多个链节，其大小介于链节和大分子整链之间。它的大小长短和形态随环境条件的改变而有所变化。从统计上看，链段的形态与整体的形态相似，是整链的缩影。这种

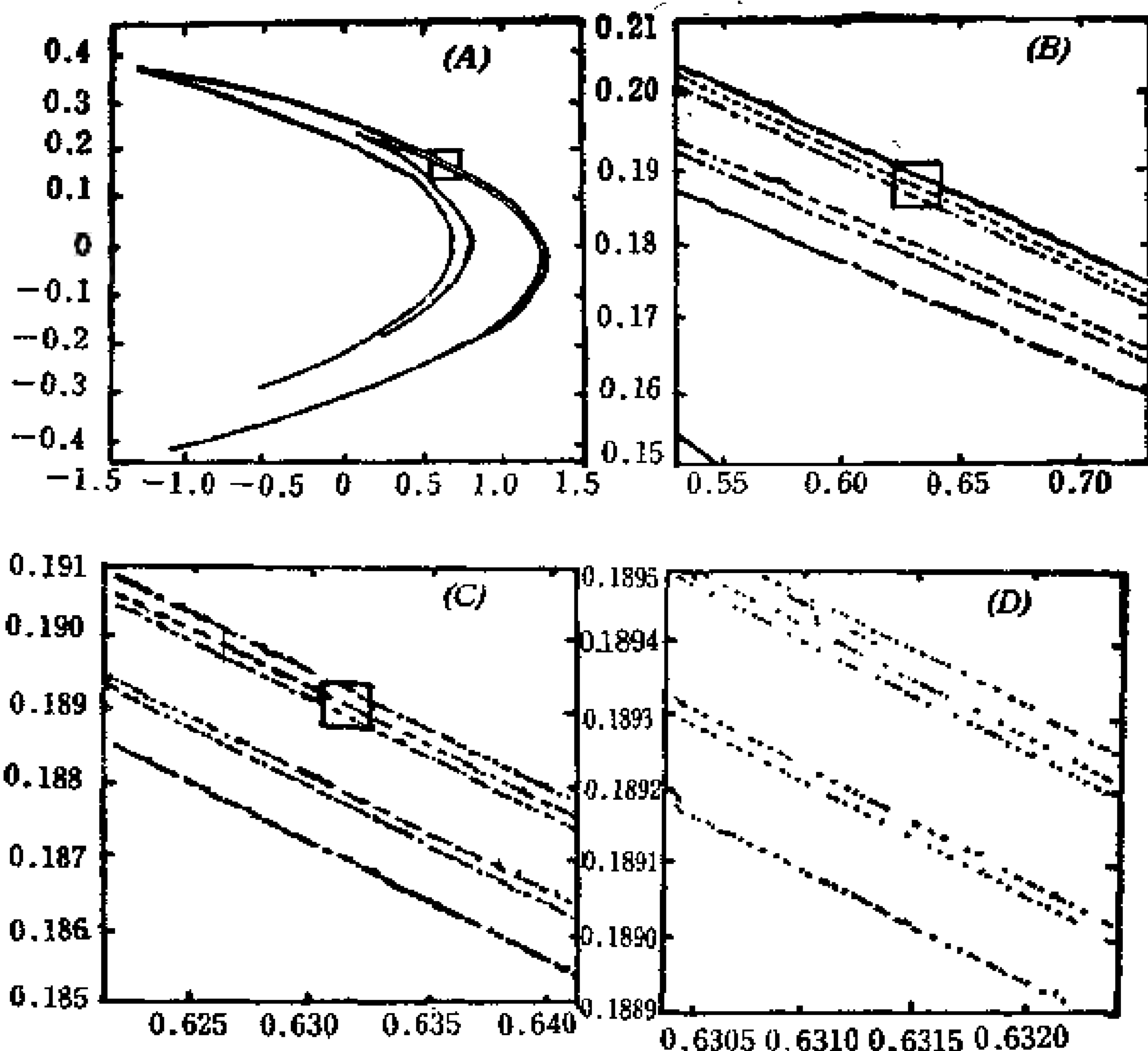


图 14-7

大分子链的局部与整体具有相似性，它是一种分形，可用分维来描述。

在生物学中，DNA 是遗传物质脱氧核糖核酸，它是一种大分子化合物。从信息和功能分形的观点来看，DNA是个分形体，内容包含着不同层次的“DNA”。复制仅是信息和功能分形的显现，相当于把一个具有无穷层次的DNA分形体进行“分解”或“放大”。所谓信息分形，就是体系的局部包含着整体的主要信息的一种特性。而功能分形是指体系的一个相对独立部分的功能与整体的功能基本相似的一种特征。即一个相对独立的部分在适宜的条件下能够“发育”成整体的特性，叫作功能分形。DNA 复制形成

的分岔树，也称为分形树。它有很好的自相似性，从中任取一独立的小枝来观察，其形态与整树相似，其功能（分岔）与整体相似，因此DNA的复制是生物体分形的基本原因。分岔只要继续下去，树枝就会布满整个空间，并且保持良好的对称性，如果分岔受到损害或阻碍，就发生"变异"，就出现不对称，不平衡，从而影响到生物体的分形性。还有蛋白质结构也有自相似性，1985年瓦格纳等指出，蛋白质的分维D_0介于1和2之间，值的大小反映了高级结构的差异。

第十五章　数学基础与数学哲学

1900年～1930年数学家开展数学基础研究，数学基础学家要根据他们的数学观，即对什么是数学"、"什么是数学的基础"等问题的回答，以及他们对数学方法、数学概念、数学命题、数学理论的看法来进行奠定数学基础的工作。数学基础学家要根据他们对数学真理的性质的看法，根据他们的数学哲学来做研究。由于各家数学观的不同，在长期的争论中形成了不同的数学基础学派，主要有逻辑主义、形式主义和直觉主义三个学派。

一、逻辑主义

1．逻辑主义的历史渊源

逻辑主义的形成究其本源可以追溯到莱布尼茨时期，莱氏把逻辑学想象成一种普遍的科学，这种科学包括构成其他所有科学的基础的一些原则，这种逻辑学先于一切科学的观点，即是逻辑主义思想原则的萌芽。但他并未能开展这一方面的工作。到了19世纪，戴德金、弗雷格和皮亚诺等人继莱氏先志，逐步发挥，如戴德金在"数的性质与意义"一文中就提出过与罗素类似的主张，但也未充分展开。弗雷格在他的名著《算术基础》和《算术基本原理》中，不仅明确地提出数学可以化归逻辑的想法，并且毕精殚智，20年钻研终于在这两本名著中把算术在两条集合论公理的帮助下化归成逻辑。

1902年罗素发现了著名的罗素悖论。什么叫罗素悖论？即设R为一切不属于自身的集合（即不含自身作为元素）所组成的集合。在朴素集合论中这样的R是合法的。R是否属于R？若R属于R，则R是R的元素，于是R不属于自身，即R不属于R；反之，若R不属于R，则R不是R的元素，于是R属于自身，即R属于R。

无论如何，都是矛盾的。例如古希腊时代一个克利特岛上的人说："克利特岛上的人是说谎者。"如果这句话真，则他自己（是克利特岛人）便说谎，从而这句话假，如果这句话假，则克利特岛人不说谎，而这句话可谓真。人们认为，如果那个克利特岛人的话进一步改为："我这句话是假的"，那末悖论便明显了。又如据说中古时代某村只有一个理发匠，他自己约定，只替不给自己理发的人理发。我们问：他到底替不替自己理发？如果他替自己理发，则依上述约定，他不该替这种人（即他自己）理发。反之，如果他不替自己理发，仍依上述约定，他须替这种人（即自己）理发。无论那一种，都出现矛盾。罗素悖论的发现给数学界极大的震动。它的出现不仅冲击了长期形成的"数学真理是绝对真理"的观点，同时也动摇了"数学是逻辑推理严格性的典范"这一信念。为了排除悖论以解决数学奠基问题，为了探究数学的本质和提高数学理论的严格性，罗素与他的合作者在总结前人工作的基础上，提出逻辑主义的主张。

2．逻辑主义的基本思想

逻辑主义的主要代表人物是英国著名数学家、哲学家和逻辑家罗素，他与怀特海于1913年完成了逻辑主义的经典代表作——《数学原理》。作者企图在这3卷本的数学巨著中向人们说明：全部数学可以以一个逻辑公理系统严格推导出来，也就是说可以从逻辑概念出发用明显的定义得出数学概念；由逻辑命题开始用纯逻辑的演绎推得数学定理。从而，使全部数学都可以基本的逻辑概念和逻辑规则而推导出来。这样，就可以把数学看成为逻辑的延伸或分支。所以，罗素说："逻辑学是数学的青年时代，而数学则是逻辑学的壮年时代。""数学即逻辑。"。

罗素在他的《数理哲学导论》一书中进一步地阐述了他的主张："通过分析来达到越来越大的抽象性和逻辑简单性，……要研究我们能否找到更为一般的思想原则，以这些思想和原则出发能使现在作为出发点的东西得以被定义和演绎出来"。那么是什么样的思想原则呢？罗素接着说："应当以一些已被普遍承认了的

逻辑的前提出发，再经过演绎而达到那些明显地属于数学的结果。”亦即把数学化归于逻辑，这是他的基本观点。

在《数学原理》中，罗素和怀特海曾用纯逻辑概念去定义皮亚诺的3个原始概念，用纯逻辑法则导出皮亚诺的5条公理，还从逻辑演算出发再加上集合论的选择公理和无穷公理把当时的数学严格地推导了出来，获得成功。故而罗素宣称：“从逻辑中展开纯数学的工作，已由怀特海和我在《数学原理》中详细地做了出来。”但是，事实并非如此，罗素从一个逻辑系统推导数学时使用了集合论的选择公理和无穷公理，这是不可缺的，否则不能完成。不用无穷公理则自然数系统就无法构造，更不要说全部数学了。所以，罗素并未将数学划归逻辑，而是划归到集合论。

要从逻辑推出全部数学，就必须发展集合论，而集合论是自相矛盾的，没有相容性的，但是，在逻辑系统中是不允许有矛盾的，因此，必须排除悖论。罗素与怀特海认为：产生悖论的根源在于集合定义中出现了恶性循环。即一个对象集合包含着只能用该集合才能定义的元素。为了避免恶性循环，他们引进了“恶性循环原则”以发展“分支类型论”来提防悖论。但是，这个“分支类型论”异常复杂，如果根据它来建造数学那将是异常的纷繁。更不幸的是，“恶性循环原则”直接排斥了数学中一种常用的定义方法——非直谓定义，如果坚持这一原则，那将丧失许多常见的数学概念和定理，因而不能实现逻辑主义的宗旨。所以，罗素后来又很勉强地引进了“还原公理”，以缓解困境。但人们易于发现，“还原公理”的精神与“恶性循环原则”是互相冲突的，难以并存。人们纷纷设难责询，普遍认为“还原公理”过分牵强附会而难于自明，这时罗素一时成为众矢之的。罗素后来也终于放弃了还原公理，但仍坚持“恶性循环原则”，这就等于在实际上他放弃了逻辑主义的主张。从纯逻辑公理连算术都推不出来，更何况全部数学，所以，从逻辑推出全部数学的主张是无法实现的。但是，1937年罗素在《数学原理》第二版导言中声称：还坚持数学就是逻辑，并进一步表示，无穷公理和选择公理都是逻辑，没有必要改变他“数

学就是逻辑"的观点。怀特海在1939年12月的讲演中显示了放弃逻辑主义的观点。

数学基础学家一般都不接受"数学就是逻辑"的观点；同样也不能接受"一切数学思维都是逻辑思维"的说法。但是。尽管如此。罗素与怀特海合著的《数学原理》一书在20世纪的科学发展中影响很大。它以当时最严格的形式化的符号语言来陈述作者建立的逻辑体系、定义和定理，从而标志符号逻辑方法的成功。并显示了数学的逻辑基础研究的意义。因而进一步显示了现代逻辑的科学意义。

《数学原理》一书成为名著。尽管逻辑主义的主张不能实现，逻辑主义的数学观不能为数学基础学者所广泛接受。但此书在方法论上的意义是不可忽视的。他们相当成功地把古典数学纳入了一个统一的公理系统。使之能从几个逻辑概念和公理出发，再加上集合论的无穷公理和选择公理就能推出康托尔集合论、一般算术和大部分数学来。把逻辑推理发展到从未有过的高度，使人们看到，在数理逻辑演算的基础上能够推演出许多数学内容来，形成了集合论公理系统的逻辑体系，这在逻辑史上是一件大事，对数理逻辑后来的发展起了决定作用，是近代公理方法的一个重要起来。

二、形式主义

一般认为，形式主义的奠基人是希尔伯特，并把希尔伯特的数学观和数学基础观称作为"形式主义"。罗素和布劳威尔称希尔伯特为形式主义者的代表人物，但他们是指希尔伯特奠定数学基础的形式化方法，不一定是指他的某种主张。而希尔伯特本人并不自命为形式主义者，他的学生贝尔奈斯也不认为希尔伯特是形式主义者。

1. 形式主义的形成

形式主义理论体系是在非欧几何产生以后，在数学和数学哲学研究中弥漫的"重建数学基础"的气氛中形成的。

当非欧几何得到人们的承认，亦即当得出互相矛盾的定理的两种几何都证明了不自相矛盾的时候，人们便要问：数学的真理体现在那里？试想想，一个几何说，过直线外一点只能作一条直线不与原有的直线相交；另一个几何说，过直线外一点至少可作两条直线不与原有的直线相交；这两个几何不是互相打架了吗？理应至少有一个是错误的，为什么两个几何都成立呢？

德国著名数学家希尔伯特主张，保卫经典数学和经典的数学方法，并且发展它们。他认为，经典数学，包括由于集合论的出现而发展起来的新的数学方向，都是人类最有价值的精神财富；为了在数学中避免出现悖论，就设法绝对地证明数学的无矛盾性，使数学奠定在严格的公理化的基础上，数学的公理和逻辑推理就像天文学家手中的望远镜那样重要，是不能丢弃的。为了实现这一目的，希尔伯特在1922年提出了著名的希尔伯特计划。

2．形式主义的基本思想

希尔伯特计划的主要思想是：奠定一门数学的基础，应该严格地、数学地证明该门数学的协调性（即无矛盾性或一致性、相容性）；希尔伯特计划的数学内容就是数理逻辑中的证明论。希尔伯特与贝尔奈斯合著的两卷《数学基础》是希尔伯特计划的代表作。希尔伯特的研究工作得到贝尔奈斯很大的帮助，《数学基础》一书就是贝尔奈斯执笔的。他忠实地按希尔伯特计划完成了这一著作，并发展了希尔伯特的思想。因此，希尔伯特的数学基础思想可以称作"希尔伯特主义"、"希尔伯特–贝尔奈斯主义"或"格丁根数学基础学派"。

希尔伯特计划，将各门数学形式化，构成形式系统，然后用一种初等方法证明各个形式系统的相容性，即无矛盾性，从而导出全部数学的无矛盾性。他区分了3种数学理论：① 直观的非形式化的数学理论；② 将第一种数学理论形式化，构成一个形式系统，把直观数学理论中的基本概念转换为形式系统中的初始符号，命题转换为符号公式，推演规则转换为符号公式之间的变形关系，证明转换为符号公式的有穷序列；③ 是描述和研究第二

种数学理论的，称为元数学、证明论或元理论。元数学是以形式系统为研究对象的一门新数学，它包括对形式系统的描述、定义，也包括对形式系统性质的研究。希尔伯特说："构成数学的每件东西现已严格形式化了，使得它变为许多公式。这些公式同普通数学公式的区别只在于：除普通记号或符号外，还引进了逻辑符号，特别是蕴涵号和否定号。作为数学形式系统基础的某些公式称为公理。一个证明是一个格式，它本身必须清楚地呈现在我们面前：它根据推理模式（即肯定式：S，S→T，所以T），由一系列断定组成，这里前提S，或是一条公理（或一些公理），或是在展开中已出现的证明格式的结尾公式。一个公式称为可证的，如果它或是一条公理或是一个证明的结尾公式。对于通常的形式化数学而言，在一定意义上要附加一门新的数学，即元数学。……在元数学中，人们处理普通的证明，后者成为研究的对象。"[1]

形式主义的提出是公理学发展史上的最重要的转折点，它标志着元数学的建立。从此，数学的发展进入研究形式系统的新阶段。这里我们要说明一点，形式主义和逻辑主义一样，都从公理系统出发，不同的是：逻辑主义者当追到逻辑公理系统时，不再持原来的对公理体系的观点，而要求逻辑公理系统具有内容，而且想方设法探求逻辑规律的真理性究竟体现在什么地方。形式主义者则不然，他们认为数学的公理系统或逻辑的公理系统，其中基本概念都是没有意义的，其公理也只是一行行的符号，无所谓真假，只要能够证明该公理系统是相容的，不互相矛盾的，该公理系统便得承认，它便代表某一方面的真理。连逻辑公理系统也认为是没有内容的、不能由内容方面保证其真理性，于是便只留下相容性"即"不自相矛盾性"作为真理所在了。所以，在形式主义中，概念都成了符号，命题都成了公式，推导都成了公式的变形，一切意义全都抽象掉了，达到了象恩格斯所说的"纯粹状态"，只是在参照一定的论域作了解释之后才获得意义。因此，形式主义是一个完

[1] Hilbert: Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math, Ann, Vol, 88(1922), P151—165。

全形式化的公理系统。

希尔伯特原来设想，数学的相容性证明可以限于有穷的构造性方法范围之内。但是研究表现，这个范围应当加以扩充。哥德尔的不完备性定理说，证明一门数学的无矛盾性不可能在本门数学内做出，必须在一门较之更强的数学中才可能做出。这定理说明之希尔伯特的原计划是不能成功的。但是希尔伯特的数学基础思想却发展了元数学，这就把形式心理学向前推进了一步，促进了数学的发展。现在，元数学(证明论）已发展成为数理逻辑的四大分支之一。

由此可见，形式主义派的观点是因为希尔伯特提出他的希尔伯特计划、建议从事元数学的研究以后才形成的，因此所有的形式主义者都推崇希尔伯特为他们的创始人。但是，希尔伯特建议希氏计划、建议元数学，只是提出一个新的研究方向、新的研究项目罢了，他本人是否有上述的形式主义派观点，很有疑问。

形式主义的代表人物有美国数学家鲁宾逊(Abraham Robison，1918～1974年，美国数学家、非标准分析的发现者，模型论的创立者之一）和科恩(连续统假设和选择公理独立性的证明者）等人。他们认为，在现实世界中不存在数学研究的对象。比如，以N表示所有自然数构成的集N={0，1，2，……}，我们不能说N存在。同样地，说"N中包括所有的偶数"是没有意义的，因为这话涉及到N这一无穷集合。形式主义还认为，数学是研究推理式形式推理的，即以一定的形式前提（公理），按照演绎推理的规则，把一定的语句作为数学定理推导出来。他们认为，一门数学就是一个形式系统，即一个符号系统。把形式前提表作具有一定形式的符号排列（符号串），把推理规则表作具有某种形式的符号排列之间的形式关系。按他们的观点，数学应看作是一种纯粹的符号游戏。对这种游戏的唯一要求是，从形式前提（形式公理）推导不出矛盾。所以，这种形式主义思想显然与希尔伯特的主张是不同的，

三、直觉主义

1. 直觉主义的历史根源

直觉主义的思想可以追溯到亚里士多德时期，亚里士多得是历史上第一位反对实无穷，只承认潜无穷的哲学家。直觉主义的哲学观点则是直接渊源于康德和布劳威尔（Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881～1966）的自然数源于"原始直觉"，即是康德的"自然数是从时间的直觉推演出来"的主张。但布劳威尔放弃了康德关于空间的直觉。19世纪的克罗内克强调能行性，说当时的好些定理都只是符号的游戏，没有实际意义。他认为："上帝创造了自然数，别的都是人造的，"而整数在直观上是清楚的，故可以接受，其他则是可疑。其意是说，只有自然数是真实存在，其余都只是人为做出的一些文字符号罢了。他还曾主张在自然数的基础上来构造整个数学。20世纪初，庞加莱亦持自然数为最基本的直观及潜无穷的主张。其他如包瑞尔、勒贝格、鲁金等半直觉主义或法国经验主义亦强调能行性的观念。他们公开否认选择公理，认为根据选择公理而作的集合，根本没有能行性，不能承认其存在。他们提出能行性的概念，没有能行性的便不承认其存在。他们都是直觉主义的先驱。所有这一切，都为布劳威尔的直觉主义提供了直接的前提，布劳威尔集其先驱们之大威，系统地提出了直觉主义的主张。

2. 直觉主义的数学观思想

直觉主义的奠基人和代表人物是荷兰数学家布劳威尔，从1907年布劳威尔的博士论文《数学的基础》开始，直觉主义者逐步系统地阐述了他们的数学观和重建数学基础的主张。他的数学观包括以下两个方面：

（1）他对数学对象的观点．他提出一个著名的口号："存在即是被构造，"他认为，人们对数学的认识不依赖于逻辑和语言经验，而是源于"原始直觉"（即人皆有的一种能力），纯粹数学是"心智的数学构造自身"、是"反身的构造"，它"开始于自然

数"，而不是集合论。这种数学构造之成为构造，与这种构造物的性质无关，与其本身是否独立于人们的知识无关，与人们所持的哲学观点也无关。构造物应该怎样就怎样，数学判断应该是永恒的真理。数学独立于逻辑和语言，数学的基础在于先验的原始直觉，这种直觉使人认识到作为"知觉单位"的"一"，然后通过不断的联结来创造有穷数以及无终止的无穷序列，并以而构造出各种数学对象，而且只有当我们把一个数学对象构造出来之后，才能说，有这样一个数学对象。因此，布劳威尔不承认有客观存在的、封闭的和已完成的实无穷体系（即实无穷），实无穷论者认为："自然数全体"就是指自然数集{ 1，2，3，……}，这是个确实存在着的、完成了的集合，可以而且应该作为数学的研究对象。潜无穷论者否认实无穷，认为无穷只能是潜在的，并不是已完成了的封闭实体，只是就其发展来说是无穷的。在他们看来，自然数 1，2，3，……，只能是永远处于不断地被构造和生成的过程，而不是完成了的、既定的封闭实体{ 1，2，3，……}。所以，诸如"自然数全体"{ 1，2，3，}这样的概念是没有意义的。

（2）对数学所用的逻辑的观点。布劳威尔对数学对象的观点直接导出了他对数学所用的逻辑的观点：认为"逻辑不是发现真理的绝对可靠的工具"，并认为，在真正的数学证明中不能使用排中律，因为排中律和其他经典逻辑规律是从有穷集抽象出来的规律，因此不能无限制地使用到无穷集上去。同样不能使用反证法。布劳威尔说："承认排中律实际上便是承认对每个数学命题都能够或证明其真或证明其假"。这是因为，对直觉主义说来，要说"A 真"便须证明它真，要说 A 假便须证明由 A 可导致矛盾。排中律说，"A 或非 A"，那是肯定能够或证明 A 真或证明 A 假。直觉主义者认为，这种肯定是不能承认的。

直觉主义认为，悖论不是偶然的，对古典数学的问题不能通过某些技术性的修改和限制加以解决，必须对其做全面的审查，放弃那些非构造的内容，重建直觉主义的数学。首先，根据"存在即是被构造"的口号，直觉主义必然排斥实无穷。其次，根据上

述口号，直觉主义者还否认传统逻辑的普遍有效性，他们认为，从有穷集上抽象出来的规律不能无限制地使用到无穷集上去。例如，全体大于部分，自然数集必有最大数等等皆是。由于悖论就出在无穷上，所以要消除悖论必须要绝对地排斥实无穷。因此，直觉主义者另建立自己的逻辑——直觉主义逻辑。在直觉主义逻辑的系统中，它的排中律和进行否定性推理以及对"存在"的解释上与古典逻辑都是大不相同的。如对古典的排中律，布劳威尔认为，一个命题在可证与可否证之间还存在第三种可能，即是"不可解"，因之古典的排中律不是普遍有效的。再其次，根据上述口号，直觉主义者必然坚持构造性数学，排斥古典数学中的非构造性的内容。20世纪50年代推进了构造性数学的发展，构造性数学已经成为数学科学中一个重要的数学学科群体，与计算机科学密切相关。60年代比肖普对构造分析的研究引人注目，这种构造方法可以得到一些新颖的见解和知识。所以，直觉主义所发展起来构造性方法有相当重要的理论和方法意义。

四、数学哲学

数学作为人类知识体系的一部分，它的产生和发展与人类社会实践活动有密切关系。在古代，人们在长期社会实践中，进行测量土地、衡量器皿、商业经营、建筑设计等活动，从而产生出算术、代数、几何等方面的知识。随着生产和科学技术发展，人类知识的深入，形成了数学的体系，它的内容越来越抽象，计算方法符号化。到了19世纪70年代，数学内容进一步发生变化，集合论成为统一数学的新基础，数理逻辑的形成，公理化运动，数学结构，数学概念高度抽象化。在这种情况下数学内容与客观实践似乎越来越远，从而引起数学哲学的讨论。20世纪30年代，逻辑主义、形式主义、直觉主义三大学派对数学基础问题的讨论，也牵涉到数学哲学问题的讨论。

1. 关于数学本体论问题

在研究数学的对象问题上有3种观点：实在论、概念论、

形式主义。

实在论观点是说数学命题反映我们物理世界最普遍的性质。这种观点比较古老，很长时期占统治地位。按照这种观点，数学是物理科学的一部分。现代西方数学哲学中的实在论，认为数学的研究对象（包括实无限性对象）是一种独立于人类认识的客观存在。这种观点在西方数学界中是有很大影响的。因为，数学真理明显地是不以人们意志为转移的。如逻辑主义者弗雷格所说："如果我们相信数学的客观性，那就没有任何理由反对我们借助于数学对象来进行思维，也没有任何理由反对关于数学对象的这样一幅图景，即它们是早已存在着的、并等待着人们去发现"。❶因而，在一定的意义上，也就可以说实在论是西方数学家们的一种自发的唯物主义哲学倾向。

概念论的数学观认为数学的对象是某种精神或思想对象。按照对象的性质又可以区分为两种观点：一个是柏拉图主义，认为数学对象是他所说的"理念世界"中的存在，而理念世界则与经验世界相对立，是一种不变的、永恒的存在。从认识论的角度看，柏拉图主义则强调了数学认识活动的先验性，即认为数学的认识建立在所谓的"数学直觉"之上。一般认为，康托是现代西方的数学柏拉图主义的主要代表人物，康托研究超无穷集合时，认为数学的本质不在于它与经验世界的联系，而在于数学思维的自由性。另一个是直觉主义，认为"存在即是被构造"，数学是"心智的构造"，认为数学基础在于一种先验的原始直觉，数学对象是先验的一时的直觉过程。以上数学家在数学本体论问题上陷入了唯心主义。

形式主义认为，数学对象是形式系统，一切数学对象都是无意义的符号，数学命题则是按照一定法则组成的符号来到。对此，没有，也不必要给出解释，因而我们在数学理论中从事的只是无意义的符号系列的纯形式的变形（演算）。形式主义与实在

❶ 转引自M·杜梅特：《维特根斯坦的数学哲学》、见《数学哲学论文集》，第492页。

论的观点是完全对立的。希尔伯特对实无限概念的实在性问题持完全否定的态度，他说："无论何处，无限是不会实现的。它既不存在于自然界中，也不能作为我们合理思维的基础"。❶

2．数学真理论问题

持实在论及柏拉图主义观点的人认为数学是不依赖于人们对它的认识而存在的，因而具有绝对真理的性质。所以数学家的工作就在于发现这种真理。但是直觉主义者和形式主义者则认为数学家的工作在于发明。当然，人们是不可能凭空发明任何东西的。对于直觉主义者来讲，总是承认自然数是给定的，至于别的就是人们从自然数出发的发明。

形式主义者的形式系统虽说可以任意选出，但是终究在发明过程中也依赖于经验及过去的知识，或者说是从客观世界中归纳出来的。要不然，那就的确是游戏了。

不过直觉主义的发明和形式主义的发明完全不同，直觉主义的发明不是任意的，而是必须能够具体选出来。也就是从自然数经过有限多步写出来。他们主张，要证明一个数学对象存在，必须指出这个对象是怎样造出来的。这种观点可以追溯到德国著名哲学家康德。他认为数学最终的真理性在于数学概念可以通过人的智慧来构造。

由于对数学对象的观点不同，所以对于数学命题的真假以及数学的可接受性也有不同的看法。一门数学是否被大家接受往往不只是靠真、假，而且还有许多其他因素，特别是是否有直观或经验的依据，以及实用性。当然最重要的是真假。不过各派的真理观距离实在太远。

对于实在论者，数学命题的真假靠实践检验。它正如物理学及生物学命题一样，靠观察实验。比如高斯的确实实在在地在地球上找三点，具体测量三角形内角之和是否 180°。

对于概念论者，数学命题的真假靠先验的假定。直觉主义者

---

❶ 希尔伯特：《论无限》，《数学哲学论文集》，第151页。

明确表示了坚持康德关于算术命题的绝对真理性的观点，而放弃他的关于几何的绝对真理性的断言。直觉主义对彭加莱关于数学归纳法的先天性的分析是完全同意的。但更进一步，认为数学直觉不仅是数学归纳法（从而也就是算术）的基础，而且也是全部数学的基础，数学就是这样的构造性活动，它可以借助于数学直觉而得到建立，这样，直觉主义者就把被彭加莱绝对地对立起来的算术与几何重新统一起来了。直觉主义者还把数学直观说成是纯粹的心智活动，这样，数学真理的客观性就完全被否认了，从而陷入唯心主义。

对于形式主义者，数学命题无所谓绝对真假，而是相对于某一个系统，但是这个系统必须是无矛盾的。无矛盾性是真理的判断标准。实际上，形式主义者也可以看成是一种"真理取消论者"，因为他们明确地提出了应该用可接受性的问题来取代真理性问题的研究。形式主义者的主要代表人物之一克里曾明确指出："形式主义真理观的特点就在于把一个命题相对于一个可予以解释的数学系统的真理性问题分成两个部分：命题相对于形式系统的真理性和系统作为整体的可接受性"。●形式主义认为数学理论只是一种无意义的符号系统，当然就无真理性问题可言，而且只能考虑其可接受性的问题。

逻辑主义者认为，数学可以划归为逻辑，即数学的概念可以由逻辑的概念出发经明显的定义而得出，数学的定理则可由逻辑的法则出发通过纯粹的演绎而得出。因此，在逻辑主义者看来，数学真理无非就是逻辑真理的一种"缩写"，即是"定义下的逻辑真理"。还认为逻辑命题不包含任何事实内容，逻辑命题不为经验所证实，也不能为经验所否定，逻辑命题是先验的、是超验的。由此得出结论：和逻辑命题一样，数学命题也是一种不包含任何事实内容的"分析命题"。从而，逻辑主义者也就完全否定了数学真理的客观性，陷入唯心主义泥坑。

● H·克里：《形式主义哲学纲要》，第60页。

第十六章　现代数学与社会发展

数学是人类在数千年文明史中所创造的精神财富，它随着社会的进步而不断地发展。一个国家的经济发达繁荣，生产技术先进，科学文化灿烂，它的数学就越发展。数学与社会有密切的关系，有相互联系、相互作用的关系。

一、世界数学中心转移与社会发展

从数学史看，数学的发展依赖于社会经济、科学技术的发展，特别是经济因素。一般说来，数学发展中心与经济发达中心相一致。

1．古希腊曾是最早的数学中心

公元前8～6世纪，古希腊奴隶社会是人类文明史上的重要里程碑。它是一个地跨欧、亚、非三洲的庞大帝国，它发展了手工业和商业，开拓了东西贸易通道，促进经济发达繁荣。由于贸易又促进了东西方的文化交流，东方的文化得以在希腊汇聚，经过希腊人，加工和过滤澄清，创造出一种新的文化。经济繁荣又促进科学技术的发展。古希腊农业技术和经验是农业科学的萌芽。古希腊的制陶、冶铁技术和经验是化学的萌芽。古希腊纺织技术和经验是纺织科学的萌芽。古希腊建筑技术是建筑科学的萌芽。而农业、建筑业、手工业、航海等的发展推动了天文学与力学的发展。古希腊达到了古代科学技术发展的高峰，而科学技术发展又促进数学的发展，使古希腊成为数学中心。由于古希腊自然哲学发达，推动自然科学形成自己的理论体系。希腊民族具有偏爱抽象的理性思维的特点，他们追求理性的升华，创建了严密的逻辑方法，使古希腊数学知识系统化、理论化，跨进理性的门槛。欧几里得的《几何原本》是古代数学的最大成就。他是用公理

382077

方法建立起演绎的数学体系的杰出代表。他把逻辑推理引入了数学，使数学理论构成了严密的体系。他的学说一直被认为是科学理论逻辑结构的典范，这在数学史上是一个巨大的飞跃。阿波罗尼奥斯（Apollonius，约公元前262～190）著《圆锥曲线论》8卷，探讨了抛物线、椭圆、双曲线的一般性质，已见利用坐标的[illegible]

[illegible]

一些形状比较复杂的面积和体积的计算方法，[illegible]

思想。他继承了古希腊研究抽象数学的方法，又使数学研究与实际应用相结合，这在科学史上有重大意义。毕达哥拉斯学派为数论研究奠定了基础。

2．中世纪数学中心从希腊转移到中国

公元前221年秦始皇建成了我国第一个统一的封建制中央集权国家——秦朝，从此开始了封建社会繁荣发展的时期，特别是到了隋唐宋时期（公元6～13世纪），我国封建社会达到了经济

同余式组的解法方面取得了卓越成就。李冶的《测圆海镜》和《益古演段》采用文字符号代表未知数，借以列方程（即天元术），为代数学向更高阶段的发展准备了条件。杨辉的《详解九章算术》则发展了实用数学，对各种问题提出了简捷算法。朱世杰的《算学启蒙》成为当时的一部很好的算学启蒙教科书。他的《四元玉鉴》对解高次方程组，高次等差级数求和以及高次内插法有精辟论述，令我国古代数学处于世界领先地位，它主要成就是算术和代数，没有形成公理化的几何体系。

3. 文艺复兴时代，意大利是当之无愧的数学中心

15～16世纪的文艺复兴是反对封建主义思想禁锢的一次伟大的思想解放运动，发源于当时工商业最发达的意大利。它使早期的资产阶级文艺、科学和艺术达到空前繁荣，它掀起了学习古希腊的科学艺术的高潮。当时，意大利资本主义工业生产开始逐步代替工厂手工业，在工业中使用了最简单的机器（水轮、改良的织布机、测风仪、挖土机、起重机等），这就需要知道综合技术知识，要进行计算和解决一系列机械和数学问题。还由于与亚洲、非洲和欧洲贸易，哥伦布发现了新大陆，航海技术的发展引起需要大量计算工作的综合天文学的发展，迫切需要新的探索数

业蓬勃发展，海上交通线从地中海扩展到大西洋。英国的海外贸易发达，英国成为世界上最大的资本主义国家。新兴资产阶级发展采矿、造船、纺织、造纸以及兵器生产，需要更有效的生产工具，逐渐创制出了诸如抽水机、锻压机、起重机、车床等机械，推动机械学、力学发展，使研究物体的运动和变化成为科学中日益迫切的课题。力学在各门学种中首先兴盛起来，而力学的进步又直接求助于数学。数学家常常是在力学研究中施展出自己的科学才能。为了解决力学问题需要寻找和创造数学工具，这又大大地促进了数学的发展，数学与力学的紧密结合是当时科学发展的重要特征。1662 年英国成立了皇家学会，对英国的科学研究起到了推动作用，在皇家学会中云集了一大批科学家，有牛顿、虎克（Robert Hooke，1635～1703）、波义耳（Robert，Boyle，1627～1691），有天文学家哈雷和J·布拉德莱，有数学家约翰·沃利斯（John Wallis，1616～1703）哈克和马克劳林（Colin Maclaurin，1698～1746）等，这样，数学中心由意大利转移到英国。

英国数学家约翰。沃利斯写了很多数学著作，有《无穷小算术》、《代数论文》等，后者引入了变量极限的概念。英国数学家伊萨克·巴罗（Isaac Barrow，1630～1677）写了《光学和几何学讲义》，他引进"微分三角形"、"切线斜率"的术语，并把它作为函数的无穷小增量与自变量的无穷小增量之比的极限概念。他阐述了微分和积分问题之间的互逆关系。巴罗对他的学生牛顿影响很大。著名科学家兼数学家牛顿在 1687 年出版了《自然哲学的数学原理》一书。他仿照欧氏公理方法，建立起了经典力学公理体系，科学地定义了力的概念，并提出机械运动三定律，标志着经典力学的完成。在这本书中已提到微积分。牛顿在 1711 年出版了《运用无穷多项方程的分析学》，在 1736 年出版了《流数法和无穷级数》，1704 年发表论文《求曲边形的面积》。他在这些著作和论文中系统地、详细地简述微积分原现，创建了微积分。微积分的创立是数学史上的重大成就。

5. 18 世纪法国数学取代英国雄踞欧洲之首

18 世纪法国大革命胜利，大规模的资本主义企业已发展起来，如安森的煤矿、炼铁厂和铸造厂，色当的呢绒厂 生产毛织品、麻布、丝织品的企业发展起来。自由贸易政策促进了资本主义工商业的发展，也推动了科学技术的发展。法国出现了一大批科学家和工程师，有数学家拉格朗日、拉普拉斯，有物理学家库仑（Coulomb,Charles Augustiu de, 1736～1806）、阿拉戈（Arago,D.F.J.1786～1855），化学家拉瓦锡、盖·吕萨克（Gay-Lussac,J.L.1778～1850），生物学家居维叶（Cuvier Georges,1769～1832）和拉马克（Lamarck,J.B.de1744～1829）等。在法国大革命推动下法国自然科学水平已超过了英国，居世界领先地位。资产阶级为了发展工业和军事斗争的需要，大力促进数学的发展。当时军事学校都有第一流数学家在执教，一些数学家还在直接参与武器火药的制造，並在防御工事的修筑等实践中创造新的数学理论。法国资产阶级革命从思想启蒙运动开始，他们高举科学与理性两面大旗，从科学反对神学，以理性反对迷信。启蒙思想家伏尔泰很重视数学，百科全书派达朗贝尔本身就是大数学家，撰写百科全书中的数学条目。法国数学已超过英国，并拥有了包括拉普拉斯、拉格朗日等著名数学家的阵营，法国成为世界数学中心，他们的优势一直持续到 19 世纪，法国数学的主要成就首先是进一步发展了数学分析，克莱罗（Clairaut, Alexis-Claude, 1713～1765）、欧拉研究曲线和曲面的力学问题和光学问题。大地测量和地图绘制促进了微分几何的产生；拉格朗日和贝努利兄弟研究力学和天体运行，建立了变分法和常微分方程理论；达朗贝尔（d'Alembert,Jean Le Rond,1717～1783）、拉普拉斯、拉格朗日研究弦振动、弹性力学和万有引力，建立偏微分方程理论（主要是一阶的）；欧拉、柯西建立了严格的极限理论作为微积分的基础。对流体力学的研究促进了复变函数论的产生；伽罗瓦解高次方程，引进了"群"的概念，揭开了近世代数的序幕：1809 年蒙日（Gaspard Monge, 1746～1818)出版第

一本微分几何著作《分析在几何上的应用》；1822年数学家庞加莱研究几何图形在投影变换下的不变性质，建立了射影几何，射影几何在19世纪下半叶成了几何的中心。

6．19世纪德国数学的崛起

随着19世纪德国资产阶级革命运动的发展，德国建立了统一的德意志帝国。经济上资本主义工业有了很大发展，矿产、煤炭、纺织、化工，交通运输业等迅速发展，生产的机械化逐年增加。特别是莱因区工业最发达，工业上迅速赶超英法等老牌资本主义国家，采用了最新科学成就这条捷径，大力实行鼓励科学发展的政策，推动科学技术发展。例如，1873年德国生产合成染料已达1千吨，在染料技术上的专利就有948项，而英国只有82项。1895年德国出现了各行各业普遍超过英国的势头，成为世界经济大国。1873年建立"国立物理研究所"。由国家组织科学研究，这在世界上是最早的，促进了德国科技进入繁荣时期。特别是19世纪下半叶，著名科学家成批涌现，成果累累。在欧洲各国自然科学进步的条件下著名的德国古典哲学（黑格尔、康德费尔巴哈）也发展起来，他们以思辨原则为基础，提出了颇有系统的关于自然界全貌的理论。特别是康德强调在一切自然科学中应用数学的重要性，他把数学和自然科学紧密地联系在一起，这就推动了德国数学的发展，使德国成为世界数学大国。

德国数学的主要成就首先是数学分析的巨大进展。德国数学家维尔斯特拉斯（1815～1897年）建立了极限理论，确定了一致收敛性概念。1872年数学家戴德金、康托尔、维尔斯特拉斯建立了实数的严格定义。康托尔研究变量和函数概念的精确化而建立集合论，发展了超穷基数的理论，为实变函数奠定了基础。著名数学家高斯在数论、代数、数学分析、概率论、级数理论等许多数学领域都有重要的发现，高斯还发现了非欧几何学。数学家黎曼于1854年创立了非欧几里得的黎曼几何学，同时提出了拓扑流形的概念。1899年数学家希尔伯特的名著《几何学基础》一书出版，提出了欧几里得几何学的严格公理系统——希尔伯特公

理系统，克服了欧氏《几何原本》的缺陷，对数学的公理化思潮产生了巨大的影响。著名数学家克莱因发表了著名的"埃尔兰根纲领"，明确提出数学各科的共性问题，首先提出将各种几何看作是各种群的不变量的理论，揭示了似乎极不相同的几何之间的统一形式，引起了数学观念的深刻变革。他还创立自守函数论。克莱因提醒数学家要高度重视数学应用，他筹建"哥廷根应用数学和技术促进协会"，开创了科学家同经济界领导人合作的先河，对德国应用数学的发展起了重要作用。这座花费100多年功夫建立起来的国际数学中心，却在德国法西斯的空前的政治迫害下毁于一旦。

7．20世纪中叶美国成为数学大国

20世纪经过二次世界大战，主要工业发达国家都受到挫伤，都成了弱国，急待补养自救。唯有美国利用战时军需工业的发展，产值翻了一番，比战前更加繁荣富强，进入经济发展的"黄金时代"，成为世界上经济大国。战时技术转入民用，刺激生产发展，工农业向机械化、电气化、自动化发展。雷达的发展，刺激了电视广播与通迅事业新技术发展。喷气式飞机带来交通运输工具的革命。火箭技术使后来宇航事业成为国家事业。原子能科学推动了能源革命。自动化技术、信息论成为改变生产面貌与社会面貌的重要手段。特别是电子计算机的发明，大大提高了各项工作的效率，促使科学技术高速度发展，从而推动数学的发展。美国成为数学的大国。

美国的数学取得了重大进展。著名数学家冯·诺依曼由于经济与军事的需要，创建对策论。1944年他与摩根斯特恩（Oskar Moreenstern，)合著的《对策论与经济行为》一书，标志着对策论诞生．他对点集论、算子理论、连续群论以及设计制成第一台电子计算机等都有重要贡献。数学家柏克霍夫（George Dauid B-irkhoff，1884～1944年）用他发明的极小极大方法推进动力系统的研究，他的工作总结在1927年出版的《动力系统》一书中。这个理论把拓扑和分析紧密地结合起来，成为数学研究的一个主

要工具。数学家维纳（Norbert Wiener，1894～1964年）与生物学家、工程技术人员合作，于1948年创建了《控制论》新学科。数学家申农（Claude Elwood Shannon，1916～　）1948年在贝尔电话研究所工作时创建了《信息论》新学科。在同一时期，著名美籍华人数学家陈省身首创运用纤维丛于微分几何研究，提出了后被广泛应用的陈示性类。50年代以来，埃·霍夫曼（A.Hofmann，1924～）和马·霍尔（M.Holl，1900～　）等人研究《组合数学》取得很大进展，并且广泛应用于试验设计、规划理论、网络理论、信息编码等方面。1953年基费（J.Kiefer，1924～）等人提出了优选法。1956年美国杜邦公司采用了一种统筹方法，是一种安排计划和组织生产的数学方法。1957年贝尔曼（1920～）创立动态规划理论。1958年美国的一个计算机协会小组创立了算法语言，用于电子计算机程序自动化。数学家罗宾逊运用数理逻辑的方法，使无穷小量获得新生，于1960年提出了非标准分析，著有《非标准分析》一书。1965年美国数学家扎德创建了模糊数学新学科。1976年美国伊利诺大学的阿佩尔（K.Appel）和黑肯（W.Haken）在计算机的辅助下证明了四色问题，这一成果使数学界大为震惊，开辟人和机器合作去解决理论问题的途径。

8．前苏联成为数学强国

十月革命后前苏联社会主义现代化建设速度很快，二次大战后，前苏联社会主义经济恢复较快，经济建设迅速发展曾经是世界上第二超级大国，特别是重工业与国防军事工业实力很强，核武器、火箭导弹、人造卫星、宇宙飞船等处于世界先进水平。科学技术蓬勃发展，促进数学的发展，前苏联成为数学强国。

前苏联数学的主要成就。数学家柯尔莫哥洛夫（Андрей Николаевич Колмогоров，1903——），他对开创现代数学的一系列重要分支作出重大贡献，他建立了在测度论基础上的概率论公理系统；奠定了近代概率论的基础，他也是随机过程论的奠基

人之一。50年代他把经典力学与信息论结合起来，解决了对称量刚体高速旋转的稳定性和磁力线曲面的稳定性。60年代后他又创立了信息算法理论。1980年由于他在调和分析、概率论、动力系统方面出色的工作获沃尔夫奖。数学家维诺格拉多夫（Nван Матвеевяч Виноградов，1891～1983）他的主要贡献在解析数论方面，他证明了：存在正数C使得每个大于C的奇数是三个奇数之和，称为哥德巴赫——维诺格拉多夫定理，他一生不断完善和发展估计各种三角和的方法，在许多著名数论问题上得到重要结果。辛钦（Александр Яковлевич Хинчин，1894～1959）是现代概率论的奠基人之一，在分析学、数论、概率论对统计力学的应用方面也有重要贡献。他在1932年发表了排队论的论文，50年代写了著名的专著。数学家卢津(Николай Никоваевич Лузин1883～1950年)和苏斯林，亚历山德罗夫共同创建立新的数学理论——描述性函数论。后来他还发现了新的集——射影集。他在微分几何、微分方程等领域都有建树。数学家庞德里亚金（Лев Семёнович Понтрягин，1908——）的拓扑群的庞德里亚金对偶定理，庞德里亚金示性类都是十分重要的工作。50年代开始研究振动理论和最优控制理论，以庞德里亚金的极值原理著称于世。他的主要著作有《拓扑群》。数学家盖尔范德(Nзраиль Моисеевич гельфанд，1913～)发展了交换赋范环论，即变换巴拿赫代数论。他着重研究广义函数，并与别人合写了关于广义函数的多卷巨著。以1968年开始，他研究光滑流形上所有光滑向量场构成的李代数的上同调，在微分几何和代数拓扑中有重要作用，1978年他获得沃尔夫奖。

可见，数学史证明了数学中心的转移，同经济、科学技术的转移相一致。进步的社会、繁荣的经济、先进的科技是数学发展的必要和有利条件，数学与经济、科技都有密切的联系。但是，社会环境的作用，除了经济基础，还表现为政治变革、哲学思想，以及一般文化的影响，所以在经济不是最发达的国家数学跻身于先进行列也是可能的，第一次世界大战后的波兰数学发展就是一例。

二、现代数学与社会实践

数学的产生与发展，同人类社会生产、科学活动有密切关系。随着现代数学的高度抽象化，数学自身独立性增强，数学与社会实践的关系日趋多样化，也更趋密切。

1．社会生产向数学提出需求，促使新的数学理论与方法产生

恩格斯指出："数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。"①伽利略认为数学和科学的基础是实验，只有在实验的基础上进行数学分析才能认识自然规律。他承认数学知识来自对自然界的认识。现代数学是人们长期社会实践活动中经过抽象思维而产生的。现代生产技术和科学的迅速发展，使数学问题的现实来源更加广泛了。概率论研究最初是由于保险业的发展，但是鼓午数学家思索的专门问题却是骰子和纸牌赌博的贵族们的要求。运筹学是第二次世界大战期间发展起来的，用于研究军事活动和经济活动有关运用、筹划与管理等方面的问题，通过数学的运算，作出合理的安排，有效地使用人力，物力，提高效率。由于探讨跨声速飞行推动了混合型偏微分方程理论的研究。而泛函分析的发展，则是由量子力学和电动力学问题、计算技术问题、物理学和技术的统计问题等等所推动的。60年代初我国数学家独立创造的解椭圆型微分方程的系统化计算方法——有限元法，短短10年中已成功地应用于几十个科技领域。实践的需要促进了有限元法的研究与逐步完善。由于研究复杂系统与模糊现象，研究用电子计算机摸拟人脑去识别模糊图象，促使人们提出了模糊数学。突变理论是由于研究自然现象和社会现象中由渐变、量变发展为突变、质变的过程而产生的。所有这些说明现实世界蕴藏着无穷无尽的数学原料，永远不可穷尽。而且，直接来自实际材料的数学概念越多，通过再加工而发展新概念的可能性就越大，正如恩格斯所说："为了

① 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页。

继续前进，我们必须汲取真实的关系，来自现实物体的关系和空间形式”。●

2．社会实践是检验数学真理的标准

数学发展依赖社会生产和科学技术的发展，也可以由数学自身纯粹逻辑地提出问题，它具有相对独立性。当一个数学分支基础奠定之后，它的进一步发展，常常并不受来自外部的明显影响，因而它自己就以一个真正提问者的身份出现，借助于逻辑的方法就能提出和解决许多新的富有成果的问题。另外，在数学发展的一定阶段，由于对已经积累的丰富材料的分析，也会提出一些数学理论自身的矛盾。解决这些矛盾的过程有时还可以导致数学新学科的建立。数学的发展具有相对性。数学理论的发展可以走在生产与科学实验等社会活动的前面，为它们作好理论的储备，成为研究科学技术问题的有效方法。这样，数学新理论的真理性最后还得由社会实践所检验。如 19 世纪数学家尝试证明欧氏几何第五公设的问题，最后以逻辑推导出非欧几何学这一新学科。高斯最早发现非欧几何学的轮廓，他怕新理论会被人嘲笑，未敢提出。另一发现非欧几何学的匈牙利数学家波尔约则，因知道高斯也有此发现而感到沮丧。罗巴切夫斯基在 1826 年公布了非欧几何，遭到各种嘲笑与谩骂。一直到 20 世纪爱因斯坦的相对论中成功地应用非欧几何，才被作为科学理论而获得充分发展。公元前 200 年希腊几何学家阿波罗尼奥斯的“圆锥曲线论”，经过 1800 年才找到了在光学抛物镜研究和天体运动理论中的具体应用。本世纪初，为克服黎曼积分的局限性建立了“勒贝格测度和积分理论”，当时由于找不到应用而遭到讥讽。今天，勒贝格积分却成为现代控制论、信息论等学科不可少的工具。布尔代数的发明人绝没有想到他的理论会被用于电子计算机。傅里叶级数的创始人同样也没有想到根据他的理论发展出来的傅氏分析会在雷达探测、全息照相等技术中大显身手。一直被作为纯理论来研究的数

● 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社 1970 年版，第 37 页。

论，它的许多结果如今在计算方法、代数编码、组合论、计算机科学等领域内得到了广泛的应用。1860年初创时作为纯数学理论一部分的矩阵理论，65年后作为描述原子系统中矩阵力学的基本数学工具得到了应用。张量计算是19世纪90年代创立的，仅相隔20年，就被爱因斯坦应用于相对论，成为相对论的基本数学工具。微分和积分算子的本征函数展开理论，是希尔伯特于1906～1910年创立的，约20年后（1927年）就被应用于波动学。可见，数学理论是否具有客观真理性，实践是检验数学理论的标准。这些相对发展阶段的纯理论之所以对实践有巨大的指导作用，正因为这些理论是基于实践基础产生的历代数学知识继承、积累与发展的结果。数学发展在某一分支、某一阶段上常常表现为以理论到理论，而从整个数学发展过程来看，还是遵循实践——理论——实践这个马克思主义认识论的基本规律的。

3. 数学对社会的推动作用

虽然，社会实践是数学产生的基础和检验数学内容真理性的标准，但是，数学的发展反过来有力地推动着社会的繁荣和进步，这是数学对于社会的巨大的反作用。

首先，现代数学对于生产技术的推动突出反映在产业革命的影响。在早期资本主义生产力发展需要刺激下产生的微积分，反过来推动了以机械运动为主的17、18世纪的科学技术。18世纪第一次产业革命的主体技术蒸汽机、纺织机等的设计及对运动、变化的计算只有在微积分发明后才有可能。19世纪60年代开始第二次产业革命，前后分为两个阶段。第一阶段以发电机、电动机为主体技术，这些技术当然是依靠了电磁理论，但电磁理论的研究却是与数学分析的应用分不开的。电磁作用的数学基础由数学家高斯、泊松(Simeon-Denis Poisson，1781～1840年)，法国数学家和格林（George Green，1793～1841），英国数学家等人所建立。第二阶段的主体技术是无线电通迅技术，它溯源于麦克斯韦从数学上预言电磁波的存在。正如麦克思韦所指出的，倘若没有高斯、格林等人提出的位势理论、没有偏微分方程这个数

学工具，他是不可能建立其电磁波学说的。

20 世纪 40 年代开始的第三次产业革命，主要是电子计算机、原子能、空间技术与生产自动化等。现代通用数学计算机的概念最早是数学家巴贝奇（Charles Babbage 1792～1871，英国数学家，）提出的；后来英国数学家图灵（Alan Mathison Turing，1912～1954）从数学上证明了制造通用数字机的可能性。而在世界上第一台通用电子计算机的设计改进中，数学家冯·诺依曼起了关键作用。因此，在现代计算机发展的每个重大关头，都记载着数学家的贡献。如果没有图灵的"理想计算机"，没有布尔代数，没有冯·诺依曼的存储程序设计思想，现代电子计算机的发展也是不可能的。

数学对于解决原子能技术与空间技术问题也起了重要作用。众所周知，原子能释放的可能性首先是由爱因斯坦论证的。他利用数学工具导出的著名公式 $E=mc^2$ 揭示出质能转化的规律。美国第一颗原子弹研制过程中，吸收了一批数学家参加，冯·诺依曼就是第一颗原子弹研制基地洛斯·阿拉木斯实验室的主要科学顾问。这些数学家的数学计算对于保证研制工作的顺利进行非常重要。50 年代苏联为了实施核计划与空间计划，也充分动员了数学家。1953 年苏联科学院成立应用数学所，苏卫星计划的轨道计算部分就是在这里进行的。该所专门承担与空间技术、核技术与自动化技术有关的课题并从事相当的理论研究。我国数学家周毓麟等以大量的科学计算保证了我国核计划在理论上的可靠性。

至于自动化技术，它的发展受到控制论的深刻影响，而控制论的主要创始人和开拓者是当代杰出的数学家维纳、庞特里金（1908～1988）等。

可见，历次产业革命的主体技术都与数学的新理论、新方法有直接与间接的关联，显示了数学理论转化为生产力的巨大功能与潜力。

其次，为解决数学内部矛盾而产生的纯数学成果在技术革命及产业革命中获得意外的重要应用。例如用数学形式描述逻辑思

维规律而建立的布尔代数，后来成为计算机线路设计不可缺少的法宝。

还有现有数学知识的直接应用。这类应用是大量的、经常的，人们往往对之习以为常，但有时也会引起震惊。历史上如第一条横越大西洋的海底电缆工程，徘徊多年，屡遭失败，后采用了英国数学物理学家汤姆生（James Thomson，1824～1907年）以数学推导为基础的方案，终于在1865年一举安装成功，轰动了当时科技界而被传为数学应用之佳话。超音速飞机机翼设计必须借助复变函数论中的保角映射。现代汽车与远洋巨轮的外形要依靠计算几何与样条函数而得到。70年代，苏步青教授（1902～　　）参加上海江南造船厂船体曲线放样。数学放样是以数学上求出船体的曲线。他应用3次参数样条曲线的数学方法，再由数控机床切割出所需要的材料，可节约人力，物力。自动导航设备离不开卡尔曼滤波理论。石油地震勘探少不了时间序列的数学方法，还有核反应堆计算，人造卫星姿态控制，等等，都必须应用现代数学运算。

随着科学技术的迅速发展，数学成果应用的速度在加速，周期在缩短。有些数学理论具有相对独立性，常常领先发展，成为数学基础理论储备。这种储备在适当的时机和一定条件下转化为生产力而对社会产生影响。因此，我们应该积极地支持数原理论储备，增进数学理论转化为生产力的可能性。

三、现代数学与社会管理

随着社会的发展和进步，现代社会经营规模越来越大，越来越复杂，要求社会管理精确化、科学化，这就必须运用现代数学方法。

1．经济管理必须应用数学

经济管理是最基本的社会管理。经济学中的许多因素、指标如生产量、总收入、工资、价格等等，都必须用数量表示。然而由于经济变量之间的因果关系变化莫测，数学在经济中的应用发展

是迟缓的。但本世纪30年代以来，数学在经济管理中的作用明显增长，经济分析中运用数学方法已被证明是一种有效的途径，并逐渐形成了数学经济的交叉学科。目前，数学经济大致包括两大部门，即偏重统计手段的计量经济学和以抽象的数学经济模型理论为主的数理经济学。现介绍主要的经济方法如下：

对策论方法。对策论最早的始祖是我国战国时代，本世纪40年代，冯·偌依曼创立对策论并应用于经济学，这是西方数理经济学的正式形成。对策论的经济模型就是将社会经济看作是一种竞争体系，根据已获得的信息进行定量分析以寻找最佳方案。

最优化方法。最优化方法研究在一定约束条件下如何选取某些因素的值使某个(或n个)指标达到最优，因此在经济学中自然有广泛应用。例如最优经济决策的选择、国民经济计划的确定、经济静态平衡与动态平衡模型的建立等等。解决最优化问题的主要数学方法是数学规划，即研究在变量$x=(x_1,x_2\cdots\cdots,x_n)$受到某些条件约束情况下如何寻求一个$x$使某个(或$n$个)函数在该处达到极大值或极小值。这里的函数称为目标函数，根据目标函数和约束条件的不同，数学规划又可分为线性规划、非线性规划、动态规划、多目标规划等不同分支。

优选法和统筹法是最优化方法的一部分，本世纪60～70年代，在华罗庚教授的倡导下曾在国内推广，取得很大的成绩。

投入产出方法。它是利用数学方法综合地分析和研究国民经济各部门各地区在产品生产和消耗间的数量关系及其数学模型的一种方法，因此它又叫部门联系平衡法，或"产业关联"法。这种方法的主要特点和作用，是要解决一个经济系统的各部门之间在发展过程中的平衡济调问题。采用投入产出方法，可以指示国民经济各部门的技术经济联系和再生产过程中的重要比例关系，在对经济过程进行质的分析基础上，考察它的量的关联性，从而掌握其发展的规律。这对加深理解经济过程的本质，制定有科学根据的国民经济计划，全面提高经营管理的经济效果都有十分重要的意义。

投入产出方法是本世纪30年代由美国哈佛大学教授瓦西里·列昂节夫首次发展起来的，他在1936年发表的论文《美国经济系统中的投入和产出的数量关系》中，首先公开提出了投入产出分析的基本思想和实践，随后在他发表的《美国经济结构，1919～1929》(1941年)，《美国经济结构，1919～1939》(1951年)，《美国经济结构研究》(1953年)等著作中，作了进一步的论述。50年代起在欧美和苏联盛行。我国从60年代初采用了投入产出方法。1976年编制了我国第一张投入产出表，即1973年国民经济投入产出表，其中主要产品有61类。国家计委组织试编的1981年国民经济投入产出表其包括26个部门149种产品，是第二张全国规模的投入产出表。一些省市、部门和企业，也分别编出了地区、部门及企业的投入产出表，并应用到实际工作中去。投入产出方法已引起广大经济管理人员的重视，正在推广。

数学预测方法。运用已占有的资料对经济变量作预测、估计，包括计量经济预测法、回归分析预测法等。

此外，经济成长理论中还日益普遍使用微分方程、差分方程，近年来对经济理论结构的逻辑探讨还将点集论、拓扑学等抽象工具引进了经济学。

经济学的数学方法作为一门独立的学科还在继续发展。必须指出的是，国民经济是一个极端庞大复杂的系统，经济数学不放虑数量关系以外的因素，并且数量模型也只是对现实经济关系的非常近似的描述，因而带有很大局限性，不应把数学方法在经济学中的应用绝对化。

2．*管理决策必须应用数学*

从本世纪30年代以来，出理了一批"大科学"、"大工程"、"大企业"。它们的特点是规模庞大，结构复杂，功能综合，因素众多。从性质上判断，它们具有广博性、多结构性，多分支性和综合性，等特点，其参数变量之多，活动规律之复杂，输入和输出信息量之大都是空前的。为了提高社会经济效率，不仅要依靠先进的生产技术，而且在很大程度上要依靠科学的决策。其次，

社会活动的变化多端，使领导者不断面对层出不穷的新问题，要求他们审时度势，统观全局，于千头万绪之中找出关键所在，权衡利弊，及时作出可行、有效的决断。为了做到这一点，单靠个人的经验是不够的，还必须深入地研究科学决策方法。大生产在人、财、物的投资方面是空前的，而且与整个社会的各方面也千丝万缕地联系在一起，牵一发而动全身。因此，一个决策的失误必然会引起一串连锁反应，导致严重的后果。所以，现代社会的情况，要求现代领导者实行科学决策。目前，国内认为科学决策必须包括几个方面：①决策总是为了达到一定的目标；②决策总是要付诸实施的；③决策总是在若干个有价值的方案中选择最优的方案。要做到这些，就必须运用运筹学中的决策方法，包括我们在前面提到的确定型问题的决策方法、风险型问题的决策方法、非确定型问题的决策方法、多级目标问题的决策方法、以及模糊决策等。目前，一个大工程或大企业的决策，往往要用一、二年的时间，花去占总投资万分之十的费用，来进行各项技术经济的分析比较，作出最科学决策。正确的决策会带来巨大的经济效益和社会效果。相反，错误的决策会造成巨大经济损失和严重的社会后果。

3．公益事业必须运用数学

现代公共福利与服务事业中也日益广泛地应用数学，因此数学对人类的日常生活也起着潜移默化的影响。

排队论与最优服务。在现代化的城市生活中，随时都会遇到拥挤与排队，公共汽车站、火车站、轮船码头、商店，剧场等售票处都有拥挤与排队现象。排队论是解决这一问题的有力数学工具。1940年后人们已把排队论广泛用于解决军事、运输、维修、生产、服务，库存、医疗卫生、教育等排队系统问题。60年代后，由于系统工程、计算机科学、信息论和控制论的发展，给排队论的应用开拓新的生命力，系统科学涉及各子系统的时间等待问题、要求服务问题、优先权问题、忙闲问题。它们构成了有输入过程、服务机构、排队纪律等基本特征的排队问题，必须

借助排队论。

数学与城市交通。现代城市交通计划、运输动力学、道路形式选择等普遍应用线性规划、组合图论等数学方法和计算机。运输问题的数学模型是一类特殊的线性规划模型，可用单纯形法来求解。但是，即使是一个简单的运输问题如用线性规划来解也并不简单。如在5个产地6个销地的情况下，变量竟达30个之多。因此，用单纯形法求解运输问题是不合算的。可根据运输模型约束方程式中所有变量系数均为1的特点，采取"表上作业法"来计算。

数学与生态环境。生态失衡是当今社会面临的严重问题之一，向人们提出了许多困难的问题需要抉择，数学在这里也有用武之地。用数学方法描述生物体与周围环境的相互作用，已形成一门叫数学生态学的新学科。数学生态学为自然界物种竞争、病虫害蔓延、传染病扩散等具体问题提供数学模型，因而对人类环境保护与保持生态平衡具有意义。生态系统的最优管理，是近十几年来科学家们感兴趣的课题。例如从一个湖泊中得到最大的鱼产量，从林场中得到最大的木材产量，或者使害虫的成活率极小，这些问题都是求极大值或极小值问题。在生态系统管理中，常用的最优化方法有线性规划和非线性规划，动态规划，离散最小值原理等数学方法。

数学与医疗技术。数学在医学上的应用在过去是凤毛麟角，近数十年却取得了不少成功，从而使这门使许多人望而生畏的抽象学科直接关系到人们的生命健康。最令人振奋的例子就是计算机断层扫描(CT扫描)仪的问世。设计CT扫描仪的主要理论基础是数学上的拉东变换。再如人工肾技术中血液成份分析要利用扩散方程求解等等，数学正在通过现代医学而造福人类。

4. 人口控制必须运用数学

人口理论广泛地应用概率论、数理统计和微分方程等数学工具，以研究年龄分布、出生率、死亡率、性别比例、人口迁移率以及人口发展的估计与预测等。以人口增长的数学模型为例，设

P 表示人口，t 表示时间，则人口增长率就可由方程

$$1/P\left(\frac{dp}{dt}\right)=R$$

给出，若 R 为常数 r，就得到几何级数增长模型：

$$p=A\exp(rt)$$

若假定 $R=r(1-p/L)$（r、L均为常数），就得到更适用的所谓"逻辑斯蒂"增长模型：

$$P=L/(1+\exp[-r-(t-\beta)])$$

人口增长数学模型为制定人口政策提供理论参考，但任何数学模型都是近似的，单依靠数学模型是危险的。在人口模型中可以加进各种参数，研究参数变化对解的影响。例如，可以研究人口增长对国民经济的影响，也可以反过来研究经济增长和教育普及对人口增长的影响，以及国家各项法令，政策对人口增长的影响。

四、数学的教育功能

数学对人类生产活动和科学技术有很大的作用，它对推动社会进步有很大的影响。它还有对人类具有教育功能，它是思维的工具，能够提高人的思维能力。

数学长期以来一直是人们启蒙教育和基础教育的必修课目。数学教育的意义，不仅是传授一些具体的数学知识，使人们获得为从事生产、科学以及文化等社会活动所必需具备的计算和推理的基本能力；而且通过学习数学，可以激发创造精神，提高思维本领。数学的主要教育功能有：

1. 数学可以训练人的抽象思维能力

人们研究纯碎数学正是在各种抽象的数学概念或数学结构之间思索着，近求着，寻找它们之间的内在联系和规律。数学应用过程也是一个科学抽象的过程，分析和综合的过程，要善于抓住主要关系，撇开次要的东西，经过合理的简化，把问题用数学语言表述出来，提炼成数学模型进行推导和演算，形成对问题的认

识、判断和预测，这是用数学的抽象思维去把握现实事物。

2. 数学可以训练人的逻辑思维能力

数学中每一个公式、定理都要严格地在逻辑上加以证明以后才能确立，数学的推理步骤严格地遵守形式逻辑诸法则，以保证从前提到结论的推导过程中，每一个步骤都是在逻辑上准确无误的。

3. 数学可以训练人的辩证思维能力

数学是辩证的辅导工具和表现方式。数学包含着丰富的辩证思想，数学用符号语言，用简明的数学公式，明确地表达出各种辩证的关系和转化。

人们常把学习数学，进行数学推导和演算，比作"锻炼思维的保健操"或"智力体操"，这种思维操练，确实能提高科学抽象力、逻辑推理能力和辩证思维能力，这对于自然科学、社会科学与艺术创造，都是必要的训练。这样，数学教育在整个教育中就占有特殊重要的地位。

随着各门科学数学化的发展趋势，数学更加成为每个现代受教育者不可缺少的文化素养。在我国应该宣传数学的重要性，切实提高从小学到大学的数学教学质量。数学本科学生要掌握最现代的数学基础知识。而理工、医农、生物乃至社会科学有关专业的学生，甚至在成人继续教育中都应加强对数学的学习。用现代数学知识武装起来，使人们理解数学、重视数学和正确地运用数学，这对于开发智力、提高我国全民族的科学水平和思维能力，紧紧跟上现代科学与高技术前进步伐，促进社会主义现代化建设，是有战略意义的事情。

第十七章 现代数学与社会科学

20世纪迎来了科学高度发展的时代。现代科学技术发展的一个重要趋势之一，是各门科学的数学化。数学对于科学的发展起着极其重要的作用。数学是研究客观事物中的空间形式与数量关系的科学，而客观世界的任何一种物质形态及其运动形式都具有空间形式和数量关系，这就决定了数学及其方法可以普遍运用于任何一门科学。正如拉法格在《回忆马克思》一文中曾经指出，按照马克思的说法，一切科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。❶

一、科学数学化的发展进程

科学认识的一般规律是这样的：一开始是对事物进行定性的研究，然后再研究它的量的规律性，精确的定量研究使人们能够对客观事物的认识以现象上升到本质。因此，任何一门科学的发展，如果没有达到成功地运用数学，它就不可能精确地描述出客观事物的状态和变化规律，更不可能从已知数据推算出未知的数据，从而减少了科学预见的可能性和精确性。因此，各门科学只有在充分地运用了数学时，才算达到真正完善的地步。现代科学的发展已经进入了这样一个阶段：自然科学、技术科学以及社会科学都普遍地处于数学化的过程之中，它们都在朝着愈来愈精确的方向发展。电子计算机的发展和应用，更大大地加速了各门科学数学化的趋势。

科学的数学化是有一个发展过程，它是从低级运动形态发展到高级运动形态，以简单运动形态到复杂运动形态。与此相应

❶ 《回忆马克思恩格斯》，人民出版社1973年版，第七页。

的，是从物理学、力学、天文学开始，发展到化学、生物学和工程技术科学、然后又发展到经济学、语言学、逻辑学、社会学、文学等的数学化，作为研究自然界、社会、思维发展的最一般规律的哲学，那么它的数学化将是科学的数学化的最高阶段，这也符合历史发展的客观规律。

数学已成为自然科学的强有力的工具，自然科学的数学化，已获得了丰硕的成果，已为人们所承认的事情。至于社会科学的数学化，尚有人不甚了解。因此，尚需要稍加说明。

二、社会科学数学化的必然性

所谓社会科学数学化，就是指数学向社会科学的渗透，也就是运用数学方法来揭示社会现象的一般规律。如果以相互关系上理解，也可以把社会科学的数学化，看作是数学与社会科学相互作用、相互渗透的进程。

列宁也曾作过预言，将会出现自然科学奔向社会科学更加强大的潮流。[1]列宁的这一预言正在变为现实。数学向社会科学的渗透或社会科学的数学化，这是当今科学发展的必然趋势，其原因是多方面的。

第一，现代化的社会管理需要精确化的定量依据，这是促使社会科学数学化的最根本的因素。例如，现代经济管理、物资的分配、交通的调度、城市的规划、人口的控制、教育的发展等，都需要从定量去分析研究。特别是在现代社会管理中，分析研究问题要求达到一定的精确度和可靠性，就必须提供数量的根据和划分空间范围的界限。这种现代社会的实践需要，必然要求其相关的学科能够作出定量的精确化的研究。

第二，社会科学的各分支逐步走向成熟，社会科学理论体系的发展也需要精确化。

长期以来，社会科学进行定性研究，它对事实材料的概括速

---

[1] 《列宁全集》第20卷第189页，人民出版社，1958年版。

度较快，它的思维过程比较灵活多变，容易简化。但是，对客观现象进行定性研究有以下的弱点：

首先，定性研究总是以有限的经验事实为依据进行理论概括的，这种概括并不能保证对未被考察的其他事实也必然成立。如此获得的规律性认识并没有明晰的适用范围。人们常常把有相当多事实根据的规律看成是不受限制的普遍规律，只有在发现反例后才看清其适用范围的边界，借助数学能使科学规律具有普遍性。

其次，定性研究是以感性直观的事实材料出发直接进行理论概括的，因而必然带有感性直观的局限性。科学研究要深入到那些为人的感性直观认识达不到，或一时达不到的领域，这时定性思维就难以胜任了。定量方法却能做到这一点，这就需要借助数学的高度抽象性，定量方法可以突破研究对象的局限性，从而取得直观难以想象的概念和规律。

从前社会科学的有些概念与命题，缺乏从定量上来准确地阐明事物的规律性。结果，往往模棱两可，怎么解释，怎么运用都似乎有理，这是不完善性的表现。有时借助于科学之外的力量，对某个概念，命题作随心所欲的解释，这也是缺乏精确性的表现。社会科学自身理论体系的发展，要求成为精确的、完善的科学，要求实现社会科学的现代化，这就必须对社会科学进行定量化，从而需要有效地运用数学，因为数学可以把精确性带到社会科学领域。一般说来，一门科学越是成功地运用数学，它的精确性也就越高，从而也就越完善。因此，社会科学作为一门科学而发展，它迟早需要数学化，需要推动社会科学向精确性科学发展。

第三，随着现代科学技术的高速发展，数学也得到很大的发展，它出现了一些适合研究社会历史现象的新的数学分支。它从精确数学发展到随机数学和模糊数学，又从描述连续性的数学发展到描述非连续性的数学。如概率论、离散数学、数理逻辑、模糊数学、突变理论等，都为社会科学数学化提供了有力的武器。所以，社会科学数学化的实现是完全可能的。

第四，电子计算机的应用，使过去认为不可能计算的复杂社

会现象能够进行计算。

第五，系统论、信息论、控制论等新兴的横断学科的产生，提供了定量研究社会现象的新途径和新思路。

数学是一门极其抽象的科学，所以，一门科学的发展只有达到一定阶段，科学的抽象深入到一定的程度，才有可能具备运用数学的条件。而且现象愈是复杂，它的量的参数就愈复杂，对它进行准确的量的分析也就愈加困难。虽然对社会现象的研究不同于自然现象的研究，它的随机因素较多，情况较复杂，变量参数多，造成社会科学数学化的难度比较大，社会科学数学化的进程比较晚些。但是，随着各门科学和数学本身的进步，任何现象，即使最复杂的社会现象，它们量的方面将逐渐愈来愈多地被数学所阐明，运用数学的可能性就愈来愈大，从整个科学发展趋势来看，社会科学的数学化也是必然的趋势。所以，我们应当重视把数学运用于社会科学的研究，以提高社会科学研究的质量和效率，加速社会科学现代化的进程。

三、社会科学数学化的进展

新技术革命发展，需要对人类社会进行控制和作出预测。实现对社会和经济活动最优化管理等一系列的课题，都要求对社会现象的研究更加精确化和定量化。目前，国际上社会科学的数学化进展很快。

1．社会科学的数学化，最早是经济学

在经济学中开始引用数学方法，大约已有200多年的历史。如果从古诺在1883年发表《财富理论的数学原理之研究》一书算起，也有100多年的历史了。马克思十分重视将数学运用于社会科学的研究，认为数学方法是研究经济过程的有力武器。他刻苦地钻研数学，用数学来研究经济现象的规律性。他运用数学上运算变量和常量的定律，来建立剩余价值的数学表达式。他还研究了在计算剩余价值率的公式时，工作日的长度、劳动强度和劳动生产力三个因素，按不同方向、不同程度的变化，对劳动力价格和

剩余价值量可能产生的影响。他甚至想运用微积分的公式，来描述资本主义经济危机的规律。他把数量分析作为提高研究问题的严密性和精确性的可靠途径。所以，马克思给我们树立了运用数学研究经济学的光辉榜样。

现代数学应用了经济学的研究，揭示了新的经济规律，促进了经济知识的完善化。例如，在经济学中应用运筹学中的博奕论、决策论、线性规划等数学方法，来研究消费理论、生产理论、投资理论、收入理论等，就要用消费函数与生产函数的数学形式。现代经济学研究行政经济管理自动化，经济体系的模式化，经济信息的加工和存储保险和财政体系等，都需要运用数学和电子计算机。美国经济计量学家克莱因运用数学方法建立经济计量模型，从而获得1980年度诺贝尔经济学奖金。他曾经研究"联结模型"，想把世界各个经济大国和若干重要地区的经济模型联结在一起，即把13个经济合作它发展组织国家，7个经互会国家和其他发展中地区的模式联结起来。它是世界上最大的计量模型，包含了5000个数学方程式，用以分析国际用的经济波动及其扩散，并预测国际贸易与资本动向，构成一个全球性的宏观经济模型。数学和电子计算机，对于建立各种经济的数学模型，揭示新的经济规律，促进经济知识的完善，都具有重要意义。数学与经济学相结合产生了数学经济学。

2．在研究语言现象及其规律性的语言学中，也渗透了数学方法

数学与语言相互渗透，又产生数理语言学这门新的交叉学科。它用数学方法来研究语言结构和语法形式属性。它分为两个分支：统计语言学和代数语言学。统计语言学是研究词汇和文体的统计特征，以及对语言结构本身的统计研究。代数语言学是研究语言的数学模型。随着现代科学技术的发展和电子计算机的推广应用，使人脑与电脑通力协作，使数学与语言融为一体，产生计算机语言。

人们为了实现用自然语言跟电子计算机进行直接对话，就必

须把人类具有模糊性的语言和思维过程提炼成数学模型，才能给电子计算机输入指令。建立合适的模糊数学模型，就必须对模糊语言进行深入研究。美国数学家查德采用模糊集合理论来建立模糊语言的数学模型，为解决模糊语言处理找到一个新方法。如果我们把合乎语法的标准句子的隶属函数值定作 1，那么，其它文法稍有错误，但尚能表达相仿的思想的句子，就可以用从 0 到 1 之间的连续数来表征它从属于"正确句子"的隶属程度。这样就产生了模糊语言学的新学科，从而提高计算机自动识别和控制模糊现象的效率。

3．数学与逻辑学互相渗透，产生了数理逻辑这一新学科

数理逻辑又叫符号逻辑，它是以数学理论的形式结构、数学计算、数学推理为对象，研究它们的方法和规律，并用数学方法研究正确思维过程中所遵循的逻辑规律，也系统地研究数学中的逻辑方法。数理逻辑对电子计算机的设计制造起着一定作用，它给数学提供了新的研究方法，还解决了一些重大的数学问题，对数学的发展有很大的影响。

现有的电子计算机都是建立在二值逻辑基础上的，它在处理事物的确定性方面，发挥了巨大的作用，但并不具备处理事物和概念的不确定性或模糊性的能力。为了使电子计算机能够模拟人脑高级智能特点，有些学者主张把计算机转到多值逻辑基础上，开展了模糊逻辑的研究。查德在模糊集合理论的基础上，设计出一种模糊逻辑。模糊逻辑主要用于处理模糊概念和模糊命题。对模糊命题的真值不能简单地只用 0 和 1 来刻划其真假，而是从 0 到 1 之间连续取值 1 并运用一套模糊逻辑函数公式与模糊演绎推理规则。模糊逻辑是二值逻辑的直接推广，是在多值逻辑基础上对模糊事物给以定量的描述。模糊逻辑的产生，为提高电子计算机智能化提供条件。

4．数学与文学发生了联系

数学向文学研究领域的渗透，使人们发现了数学的抽象推理与符号运算，同文学的形象思维之间有着奇妙的联系，并且与电

子计算机之间也沟通了关系。象英国数学家西尔维斯特撰写的《诗的格律》一文，就应用了数学方法对莎士比亚的《十四行诗》进行了分析。1980年6月在国际《红楼梦》讨论会上，美藉华人陈炳藻先生的论文《从词汇上统计，论〈红楼梦〉的作者问题》，就是运用了数学与计算机相结合的手段来进行考证的。

人们知道，语言是构成文学作品的"物质材料"，一个作家的作品，其艺术特色首先就是体现在对语言的加工上，"文如其人""风格即人"，认识一位作家就要认识他的风格或文体，要研究一个作家的语言特点，就要分析其词汇、句式、音律、辞格等语言材料和表达手段的选择。运用上述分析得到的种种数量关系，体现出了语言风格的"质量"方面。但是，语言的构造是一个相当复杂的体系，想用"手工业"的办法来精确测定这种细微的数量关系，是不可思议的。因此，人们要用电子计算机来帮助。要研究某一作家的作品，就要将其文体风格"数量化"，即建立数学模型（一般的是随机性数学模型，要运用矩阵这一数学工具），将其送入电子计算机里。然后用软件去求出这些作品材料的一阶，二阶直至高阶的相关矩阵。一个作家的相关矩阵，表示他的作品中使用词汇的特点，这实际上也就表示了他用词的数量特色。为此，要对其大量的样品进行统计。阶数越高，就越精确。就要借助于计算机的大量计算，在得到作家的相关矩阵之后，就可以进一步从数量上对作家的文体风格作尝试性的研究。用电子计算机来编一个作家（或作品）的词语总表，统计某些词的出现频度，分析诗的格律等等。一部文学作品，在文体上象谁，是谁写的可能性就愈大。而电子计算机运用"数学实验"方法正好为这种文体比较提供了一个明确而可信的依据。

所以，借助数学方法与计算机相结合，通过对语调、字母、字音、音节等进行大量的统计和计算，从建立研究语言因素的相关矩阵，或反映文体风格的数学模型，从而为语言文学的研究定量化开辟了新道路，它将有力地推动文学研究现代化。

5．数学向社会学领域的渗透，产生了一门新兴的定量社会学。

它应用协同学的理论和数学方法研究社会学问题，使社会学开始走上定量化的道路。1983年西德的韦德里希和哈格教授合著的《定量社会学的概念和模型》一书，用定量的数学方法讨论了社会舆论的形成、人口动力学、社会经济的发展以及战争与和平等社会学问题，推动社会学从定性向定量发展。

定量社会学运用协同学的序参量来描述系统的演化，序参量指描述系统有序程度的一个或几个物理量。只要找到社会系统的序参量，就可以使社会问题的讨论大大简化，可以利用序参量建立数学模型，得出社会系统相变的规律。它用协同学分析在系统临界点附近序参量发生突变的特点和趋势。它用突变理论、稳定性分析、李代数、拓扑学等数学工具，给出系统的可能性状态和演化趋势，并借助计算机模拟，这样，能以宏观上把握社会系统的演化过程。

例如，关于经济发展问题，定量社会学讨论在战略投资总量不变的前提下，不同性质的投资对工业发展的影响。它将投资分为两类，合理性投资，即维持现有生产部门和生产数量的投资；发展性投资，即开拓新的生产部门和扩大生产规模的投资。不同投资者对这两类投资的偏好不同，有的偏好合理性投资，有的偏好发展性投资，在假定每个投资者投资总量不变的前提下，可以认为投资结构指数（不同性质投资所占比例）与投资者构形指数（不同偏好的投资者所占比例）呈线性关系。这样可以把不同的投资结构的变化换成不同的投资者构形的运动，并列出投资者构形概率分布的运动方程。实际情况中，投资者的偏好是变化的，要受投资者本人的特点气质的影响，还随着投资者构形分布变化而变化，合理性投资多，投资者就转向发展性投资，以便在较少竞争条件下获得更多的利润。人们可以通过建立由投资者构形分布参量和投资者偏好系数组成的联立方程组，运用计算机进行计算，再将结果与实际情况进行比较。选取不同的参数值，从计算机中可以得出不同的时间发展曲线，进而从理论上预言经济发展的不同模式和不同投资政策对经济的影响。

人们还用突变理论来研究社会问题。1972年法国数学家雷内·托姆的《结构的稳定性和形态发生学》一书，宣布了突变理论的诞生，它是数学中的新学科。描述自然界和社会现象中所发生的连续变化过程，描述各种现象连续的渐变与量变的过程，通常运用微积分也就够了。但对自然界和社会现象中所发生的不连续的突变过程，微积分就显得有所不足。现在托姆的突变理论通过对事物的结构的研究，提出一系列的数学模型，说明自然界和社会现象中所发生的不连续的突变过程。这种突变理论认为，人们施加控制因素达到临界点之前，状态才是可以控制的。一旦带根本性的质变发生，它就表现为控制因素所无法控制的突变过程。它指出，还可用突变理论对社会进行高层次的有效控制，为此就需要研究事物状态与控制因素之间的相互关系，以及稳定区域、非稳定区域、临界曲线的分布与特点，还要研究突变的方向与幅度。

6. 计量历史学

60年代国外用定量方法来研究历史问题，前苏联莫斯科大学历史系开设一门《历史研究中的计量方法》新学科。前苏联学者科瓦利琴科主编《计量历史学》一书，对当代世界史学领域的计量研究趋势作了扼要介绍，简明地介绍了历史研究中最常用的计量方法和具体演算程序。

对历史发展的大量现象和过程的数量史料使用计量和计算机方法进行加工和分析，能有效地用以研究历史的诸多现象和过程。他们借助各种统计和调查材料、中央和地方管理机构及各种机构的公文函件、私人档案、参考材料、具体社会学的调查和其他资料，全面地研究历史上的人口演变过程、社会经济的发展、社会的结构、政治、文化和民族意识。针对各个不同时期，他们对大规模地区或整个国家范围内的各种关系作了全面的系统综合。如前苏联学者广泛利用数量史料来研究俄国历史发展的种种重要现象和过程。这些材料有17世纪的税册，中世纪的土地征税对象调查材料，数千个封建庄园和世袭领域，为研究封建农奴制

的重要特征提供了条件。对于研究前苏联社会发展的基本趋势，规律和特点，当今的统计资料，十月革命后定期的各种统计调查材料都是很重要的数量史料，各种工农业的统计调查，有关经济和社会发展的计划及其执行情况的材料都为研究社会发展过程提供了依据。

用计量和计算机方法来揭示数量史料中的潜信息。史料除了能直接表示出的信息外，还包含有潜信息。这种信息描述着历史活动的现象所固有的多样式的相互关系。这些相互关系不是直接表示出来的，被称为潜信息。数量史料中包含有特别多的潜信息。用计量和计算机方法加工分析揭示潜信息，可提高原有史料的利用价值，提高历史研究的效率。

运用计量方法可以把抽象的东西变得具体化，使微观和宏观研究更好地结合起来，使微观研究更好地成为宏观研究的基础。如果过去用传统方法得出的结论是"绝大部分"、"基本正确或错误、"大体如此"、评价什么"强烈的"、"迅速的"、"缓慢的"等等，深入分析这些变化，诸如此类的评价就显得不够，那么，运用计量方法得出的结论就是十分具体了。

运用计算方法还可以不断深化史学家的思维活动，使计量方法不断发展和完善，并进而不断总结和创造出新的研究方法。

20世纪50年代，人口学、人种学和考古学等学科的数据都需要用数学来处理。60年代以来，研究历史学、语言学、逻辑学和法学等社会科学，都开始运用数学和电子计算机。如美国的弗里蒙特·赖顿和德里克·普顿斯对科学史的计量研究，得出了著名的科学知识量的指数增长规律，给科学史的深入研究带来了新的启示，以至在1970年十三届国际历史学家代表大会上，把在历史学研究中如何应用数学方法列为重要课题。1978年第十八届世界哲学会议把数学化的成就和范围列为八个专题之一。在会上社会科学的数学化及其前景问题引起了哲学家的极大关注。

哲学的数学化，也处在逐渐实现的过程中，由于哲学概括的程度更高，涉及的情况更为复杂，因而难度也就更大。但是，随

着哲学和数学的发展，新的数学工具还会出现，促使哲学数学化的新途径还会打通，彼此相互渗透的范围将会越来越大。现代数学的发展，众多新的数学分支的建立，将为定量地研究哲学辨证法的基本规律和范围提供了有力的工具。数理统计、概率论、模糊数学、突变理论、非标准分析等的建立，为研究必然与偶然、有限与无限、有序与无序、量变与质变、连续与非连续、模糊与精确等哲学的规律与范畴，提供了新的有效工具。特别是突变理论，它说明自然界和社会现象中所发生的不连续的变化过程，描述各种现象为何从性状的一种形式突然地跳跃到根本不同的另一种形式，它用形象而精确的数学模型表达了哲学的质量互变规律。

总之，社会科学的数学化是客观的必然发展趋势，它是历史的潮流，它将进一步向纵深扩展。目前，国际上的社会科学的数学化进展很快。由此，产生数学经济学、数学语言学、数理逻辑、模糊语言学、模糊逻辑学、定量社会学、计量历史学等新的交叉学科。把数学运用于各门社会科学，可以大大地提高社会科学研究的质量和效率，可以使社会科学成为精确性科学，还可以把社会科学提高到一个现代化的新水平，使社会科学成为更加完善的科学。

第十八章　现代数学的特点和发展趋势

我们对现代数学的主要分支的基本思想，已经作了初步探索与研究，为了对现代数学有一个系统的了解，现在，我们必须进一步地探索与研究现代数学的特点。它的发展规律和发展趋势等问题。

一、现代数学的特点

现代数学与其它科学相比较具有以下明显的特点。

1．高度的抽象性

现代数学的抽象性是暂时撇开事物的具体内容，仅仅从抽象的数量方面去进行研究。"直线"这一概念，并不是指现实世界中的拉紧的线，而是把现实的线的质量、弹性、粗细等性质都撇开了，又留下了"向西方无限伸长"这一属性，但是现实世界中是没有向两方无限伸长的线的。自然界中存在着各种变量的多样联系，而这些联系的纯形式，在数学中是作为理想的对象——函数关系而出现的。几何图形的概念、函数概念都具有抽象的特性。

数学的抽象性具有下列三个特征：首先，它舍弃了事物的其它一切性质，而只保留了数量关系或空间形式。其次，数学的抽象是经过一系列的阶段形成的，例如，整数无限序列，任意实数概念，都已经是一系列抽象的结果，但随后数学自身内部又产生了复数概念，进而超复数概念，在已有概念的基础上不断地演变。数学从最原始的概念一直到现代数学中的函数、复数、微分、积分、泛函、n维甚至无限维空间等抽象的概念都是从简单到复杂、以具体到抽象不断深化的过程。当然，形式是抽象的，但是内容却是非常现实的。再其次，不仅数学概念是抽象的，而

数学方法本身也是抽象的。物理或化学家为了证明自己的理论，总是通过实验的方法。对数学家来说，为了说明自己的新理论，光用实例与模型是不够的，数学上新的定理只有当它用符号形式从已知的前提经过严密的逻辑推理被证明之后，才能最后成立。虽然数学有高度的抽象性，但是，这些抽象的数学原理仍然是从无数的具体事物中概括出来的。相对于感性的具体事物来说，它是抽象的，但它科学地反映了客观事物的一般性的量的规律，所以能运用到一切具体事物中去，比具体事物更深刻更丰富。

2．高度的精确性

数学本身要求自己具有逻辑严密性以及结论确定性，因为数学命题的证明是建立在精密的更高的逻辑推理上，这种推理对于每个人来说，都必须是无可争辩和确定无误的。数学的发展是数学领域里的"思维接力赛"，离开逻辑思维是寸步难行的。数学锻炼了人的逻辑思维能力。而人的逻辑思维能力的提高，又反过来推动数学的发展。正因为数学结论是经过严密的逻辑推导出来，所以，数学真理本身也是完全不容争辩的。当然，这不是说数学的原则一经建立就僵化不变了，数学的严格性也不是绝对性的，而是随着数学的发展而不断地发展，每一数学真理也有它的适应范围，欧氏几何适用小范围空间，非欧几何适应宇宙大尺度空间，每一个数学真理既具绝对性又有相对性，是绝对和相对的对立统一。

3．应用的广泛性

数学的威力正在于它的抽象与精确，数学方法越是撇开具体内容，便越有广泛应用的可能性。同样一组数学方程，可以用来描述本质上全然不同的各种具体现象。例如弹性力学中描写振动过程的偏微分方程，在流体力学中描写流体动态，在声学中又用来描写声音的传播等等。客观物质形态和运动形式中都具有数量关系和空间形式，这就决定数学应用于各门科学、生产技术以及社会管理的广泛性。

人们由于数学的抽象性、精确性和应用广泛性，赋予这门科

学一种独特的地位，使人们越来越倾向于将它与自然科学和社会科学并列为人类三大知识领域，而不把它看作为自然科学的一个分支。

二、现代数学的发展规律

数学作为一门科学，它具有国际性，数学不是任何一个历史时代，任何一个民族单独的产物，它是全人类许多个时代，全人类许多民族世世代代艰苦劳动的产物，它随着人类社会生产发展和社会进步而不断发展。

1. 数学在发展过程中，不断地产生新的概念和新理论，而新概念和新理论总是建立在先辈的成就的基础上，加上精确化、补充和推广

有些数学概念和原理在远古时代就产生了，如欧几里得几何于2000多年以前就形成了严密的体系，数学经历了多少次改造，它的概念和结论仍旧保持下来。数学中的每一个新理论都是在继承先辈的成果的基础上产生和发展起来的，把新的材料添加在已经形成的领域中，形成新的方向，升到新的抽象高度。例如模糊性数学，查德是以精确数学集合论为基础，并考虑到解决模糊现象新的需要，他对数学的集合概念进行修改和推广，从而提出"模糊集合"作为表现模糊事物的数学模型，并在"模糊集合"上逐步建立运算、变换规律，开展有关的理论研究，构造出研究现实世界中的大量模糊现象的数学模型，创造了对模糊系统进行定量处理的数学方法。又如突变理论主要以拓扑学为工具，以结构稳定性理论为基础，提出了一条新的判别突变，飞跃的新理论。数学与其他学科相互渗透，产生许多边缘学科，这种相互渗透，使它的基础更加深化，更加坚实，如数学生物学、数学地质学、数学经济学等等蓬勃发展，使数学发展更加充满生命力。整个数学经过数千年世界各民族的世世代代的共同努力才发展成今天这样内容丰富、分支众多、应用广泛的庞大系统。

2. 数学的发展是以数和形两个基本概念作为基石的

整个数学就是围绕着两个概念的提炼，演变和发展而发展的。数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念进行的。社会生产的不断发展，科学技术的不断提高，为数学提供了无穷源泉和研究的课题，促使数和形概念不断深化，由此推动了数学的不断发展，形成了许多数学分支，使数学这一学科日益壮大。

但是，数和形是相互联系的，解析几何就是把一些几何特征用代数式来表达，把几何关系表达成代数式间的代数关系，使空间形式的研究归结为比较成熟的数量关系的研究。代数与几何结合，促进了它们的发展，获得了广泛的应用。比如，早在18世纪中，法国数学家拉格朗日就把时间因素作为和三个空间坐标并列的第四个坐标而引入了四维空间，推动了力学的研究。同样，力学家和物理学家把各种物理参数作为不同坐标而引进了高维的相空间等概念，使几何方法得以在物理学中发挥作用。现代的相对论，就是在这种方法下和四维时空流形的几何研究密切结合的。现代数学中把一个个函数看作一个个"点"，而把某类函数的全体看作一个"空间"，函数间的相异程度看作"点"之间的"距离"，由此得到了各种无穷维的函数空间。一个微分方程组的求解，往往归结为相应函数空间中一个几何变换的不动点问题。这样，分析的问题就具有了几何"直观"的意义。不管数学各个分支经历着怎样分、合的变化，但它始终是随着数和形两个基本概念的发展而发展。

3. 数学中的根本矛盾不断地推动数学向前发展

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的学科，为了在纯粹形态上研究这些关系和形式，必须从具体升到抽象，就得抛弃具体内容。但是，离开内容的关系和形式是不存在的，数学的关系和形式不能绝对地同内容无关。因此，数学按它的本质企图实现这种割裂是企图实现一种不可能的事情，这就是在数学本质中的根本矛盾。这种矛盾是认识的普遍矛盾在数学方面的特殊表现。一般说来，人们的思想反映世界的任何现象、任何方面、任何因素，然后又都把这些现象、方面、因素舍掉，把它们从自然

界的普遍联系中割开。当我们研究空间的性质、确定空间具有欧氏几何的性质的时候，我们完成了一个极其重要的认识步骤。但是，在这之中就蕴藏着一个问题：空间的现实性质就简单化了，公式化了，抽象得离开客观物理世界了。但是，没有这个步骤根本不可能有几何学，正是在这样抽象的基础上产生和巩固了新的几何理论。

内容和形式、具体和抽象都是数学中的根本矛盾的表现。但是，数学中的根本矛盾的决定性的表现却是在于：数学舍弃了具体的东西，周旋在自己的抽象概念的圈子中，因而脱离了实践和实验，同时，数学只有以实践为基础，只有不仅是纯粹的而且也是应用的数学时，才能是科学。正如一切方法不能自身存在和发展，只能在其应用的基础上存在和发展一样，数学也不能离开运用而存在和发展。一般方法作为解决具体任务的手段，同具体任务相对立，但是它自身又是产生了具体材料的概括之中，只能在解决具体任务之中存在、发展和得到验证。非欧几何是抽象的，后来又在相对论中得到应用和验证，从而又获得新的发展。

4．社会实践推动数学的发展

社会实践从三方面推动数学的发展：社会实践向数学提出新的问题；社会实践刺激数学向这个或那个方向发展；社会实践提供检验数学理论的真理性的唯一标准。

拿数学分析来说，由于力学和科学技术的发展提出了从一般的形态上研究变量间的依赖关系的问题。古代虽然也有了朴素的极限思想，但是那时候的科学技术不发达，研究都停留在静力学和固定不动的范围内。到了研究运动的时候，变量的概念出现了，并且成了数学的研究对象，同时也产生了函数的概念。数学向研究变量和函数方面发展，随着就产生了微积分。微积分的基本理论在实践中应用，证明它反映了科学技术发展的客观规律。分子理论和整个统计物理的研究，又促使概率论，特别是随机过程理论发展。数学理论的真理性需要在现实的应用中检验，归根到底是在实践中得到最后的证实，勒贝格积分在控制论信息论中

得到应用，这对证明勒贝格积分的真理性起了决定性作用。

所以、数学的发展是由生产的影响、自然科学的联系以及数学本身的内在逻辑三者相互作用的结果。从内容上来说，数学的发展决定于对象，但是它归根到底是由社会实践所促进的，这就是数学发展的基本规律。

5．社会政治和文化的进步推动数学的发展

数学发展受社会政治进步和文化繁荣影响很大。几何学是古希腊科学技术发展高峰的辉煌成果；代数是意大利文艺复兴时代的成就，数学分析是英国产业革命后发展的产物；法国资产阶级大革命后数学获得新的进展；德国资产阶级革命后数学蓬勃发展；二次大战后美国成为经济大国，应用数学产生与电子计算机发明；前苏联十月革命后数学获得新成就；我国解放后数学面貌焕然一新：这些都说明了社会的进步、经济发达、文化繁荣都能推动数学的发展。而在中世纪黑暗的欧洲，在国民党反动统治下的旧中国，数学却停滞不前。

三、现代数学的发展趋势

20世纪数学发展的速度是惊人的，20世纪前半叶所取得数学成果又超出了19世纪的许多倍。近30年来，数学新理论新分支已经大大超过了18、19世纪的总和。预计未来10年的数学成就又将会比现在的10年成倍地增长。全世界每年有1500余种杂志和数以万计的数学论文发表，目前这门科学仍在迅速发展中。

1．现代数学发展的整体化趋势

在数学发展史中，始终存在着两种发展趋势：即数学发展的分化与综合的趋势。这两种趋势相互联系和相互渗透推动了数学的发展。从数学发展来看，这两种矛盾发展的辩证运动表现为一个否定之否定的过程。

自然界作为一个无限多样性的统一整体，通过感觉和知觉进入人类的意识。古代数学是在总体的数和形的关系上把握自然界的，算术、代数、几何没有彼此分开，古代任何一本著名数学著

作都包括了这三方面的内容，并且把它们溶化在一起。因此，古代数学本质是一种感性直观的关于数和形的综合的科学。

从17世纪产生解析几何和微积分以后，数学分化的趋势一直居于主导地位。单一的未经分化的数学学科向许多专门分支学科发展，每一门学科所研究的都是具体完整的数学中数和形的某一方面。19世纪下半叶，代数、几何、数学分析已经形成了各自不同的研究领域，特别是分析领域的发展更是蓬勃。这时候，数学可分为数论、几何、代数、数学分析、统计数学等。但每一学科中又可分为第二层次，数论又可分为几何数论、代数数论、解析数论、初等数论；几何分为平面几何、立体几何、非欧几何、微分几何、拓扑学；代数分为线性代数、域论、环论、群论；数学分析分为函数论、泛函分析、微分方程；数理统计、概率论。甚至每一分支又可分成第三层次的分支，据说统计数学可分成50多门分支学科。数学家热心的是探索个别的事例，认识数和形的一个小领域里的最微细特征并且对它做系统的整理。每个学科都可以互不联系地单独向前发展，各学科在理论、语言、方法等方面都互不相通，每个数学家以毕生的精力研究其中的某个部分，根本谈不上统一的数学的图景。

19世纪下半叶后，数学本身的发展开始揭示出整个数学各学科内在联系的程度，数学家们经常依据数学各领域间潜在的共性，提出统一数学各部分的新观点、新方法、数学由分化走向综合的趋势。1872年德国数学家克莱因用"群"的观点统一各种形形色色的几何。本世纪初，康托尔建立集合论和公理化运动后，出现了以公理系统作为数学统一的基础。1938年法国布尔巴基学派不但继承了公理化运动的成果，而且提出"结构"概念，以非常抽象的方式叙述全部数学，把数学的核心部分在"结构"这一概念下统一成一个整体，依据研究"结构"的异同来划分不同领域；1948年波兰爱伦伯克和美国察麦克伦提出范畴和函子理论，用这个作为统一数学的基础。各种不同学派，根据他们对数学的不同认识，提出了多种多样统一数学的方法，将门类众多的

各分支学科越来越紧密地联系在一起，希望构成统一完整的数学体系。各门学科共同的语言、概念和方法正在形成，一门学科所取得的成果可以迅速转移到其他学科去，促进和带动其他学科的发展。每门学科都是在和整个数学体系的紧密联系中向前发展的。但是，这种统一不是绝对的、静止不变的，而是暂时的、相对的。随着科学技术的不断发展和深入，以及各学科之间的相互渗透，将对数学提出更多的新课题，使数学研究更加深入，将促进数学更进一步发展。

2．现代数学发展的高度抽象化的趋势

现代数学不仅是研究现实世界的数量关系与空间形式，而且更多地是研究各种广义的"量"的关系和各种抽象的"空间形式"。而从近几年的情况看，以高维、多变量和非线性问题为主，则是现代数学高度抽象化趋势的集中表现。

高维空间就是高于三维的空间，高维空间比起我们寻常生活的三维空间来性质远为奇妙复杂。过去我们说的点、线、面有一定直观意义，现在在严格的形式化心理系统下，点、线、面只是成为更加抽象的空间中的模拟物了。然而20世纪的几何学大量就是研究这种高维空间，例如将普通三维空间中的曲面推广到n维情形，产生了所谓n维"微分流形"的概念，微分流形乃是现代微分几何、微分拓扑、流形上的分析等主要学科研究对象。

由单变量向多变量的过渡，影响到现代数学的大部分领域。单变量与多变量的区别，在几何上相当于低维空间与高维空间的区别，高维空间的复杂结构，必然带来多变量问题特有的困难，激起了数学家浓厚的科学兴趣。例如研究多个复变量的函数的多复变函数论，已成为现代数学中精深的前沿学科之一。多复变函数定义区域的几何拓扑性质，决定了其研究重点由局部性质向整体性质的逐步转移，研究方法与微分几何、拓扑学等相邻学科密切结合，显示了由单变量向多变量过渡而引起的现代数学新的风貌。

现代数学中更多关注着非线性问题，所谓"线性"与"非线性"，是从代数方程论中引伸出来的概念。我们有时称一次代数

方程为线性方程，称高次方程为非线性方程，因为前者的几何图象是一条直线，而后者一般是曲线。类似地便有线性微分方程和非线性微分方程等。在数学的许多部门，线性问题如线性微分方程、线性空间、线性算子等相对而言已有比较系统的理论，虽然尚需进一步研究，但是非线性数学则还很不成熟，并且显得越来越成为当务之急。非线性随机理论、非线性控制理论……构成了非线性数学的热门课题。

向高维、多变量、非线性发展，决不单纯是数学家们对低维、单变量与线性问题兴趣的逻辑延伸，而且具有广泛深刻的现实背景。

现代数学高度抽象化，另一表现是运用公理化与结构化方法

公理化方法最先是由德国数学家希尔伯特倡导的，公理化方法将数学理论看成是一种公理系统，由少数的原始概念和一组不证自明的公理出发来运用逻辑推导建立理论体系的方法。希尔伯特的公理化方法撇开了对象的一切具体内容只考虑它们所服从的公理关系，这就赋予公理方法以极大的一般性。他提出了关于公理系统的三个基本问题，即无矛盾性、独立性和完备性问题，并曾设想，把数学的公理、定理和推理过程都形式化，用符号表示成符号体系，然后证明这个体系没有矛盾，从而产生了形式化的公理方法。本世纪以来，公理化方法已从几何基础扩张到几乎所有核心的数学领域。抽象代数、拓扑学、泛函分析等部门都采用公理方法为理论基础，连概率论这样古典的领域，也实现了公理化而获得了蓬勃发展。这种公理方法体现了数学方法的高度抽象性与广泛应用性的统一。在现代数学中，公理化不仅是整理、组织已有数学知识的有力手段，而且已成为进行具体数学研究的普遍方法。

公理化方法在广泛的应用中又更上一层楼而导致了数学结构的观点。数学“结构”的概念是由法国布尔巴基学派提出的。这个学派继承公理化方法的成果，认为数学中存在三种最基本的公理结构即代数结构、序结构与拓扑结构，并认为从这三类基本结构可以派生出不同的“子结构”，构成不同数学分支的研究对象。这

些结构开始往往是没有实际背景的，但以后发现了它们的模型，用结构的语言表达数学理论，在现代纯粹数学的研究中也是很普遍的倾向。

3、现代数学发展的更广泛渗透

现代数学正以空前的广度与深度向其它科学技术和人类知识领域渗透，从而使数学的广泛应用的特点也达到了更高级的程度。现代数学与其它领域相结合形成交叉学科，如数学物理，数学化学、生物数学、数理经济学等。还有数学地质学，应用数学方法对地质过程进行数学与计算，以及借助电子计算机对地质过程进行动态模拟。本世纪60年代形成数理气象学，用数学物理方程等工具建立大气运动数学模型并进行定性分析和数值预测，为天气预报提供精确数据资料，近年来，数值天气预报发展尤快。数理语言学用数理逻辑、集合论和统计数学等工具来研究语言结构，为机器翻译与通讯技术提供有关语言结构的精确资料。数理心理学用数理统计等工具将心理因素数量化，为解释人类知识行为提供依据。数学考古学和计量历史学用统计方法来研究历史学中的问题。这些交叉学科具有数学及其所应用的对象学科的双重性质，它们的数目还在增加。

数学在渗透、应用中形成相对独立的边缘学科。这些边缘学科与交叉学科不同的是，它们有一套比较系统的数学方法，其应用对象不只限于某一特殊的领域。现代大工业要求对工程系统的操作更可靠、更经济并且能自动控制，特别是由于航天技术的发展，对控制系统提出了高精度的要求，这样产生了一门介于数学和工程之间的控制论。工程以至生物中各种复杂的信息传递的研究，推动了信息论的诞生。大量数学问题的解决最终需要取得有一定精确度的数据，从而出现了各种具体的计算理论和计算方法，促进了计算数学的发展。这些边缘学科不仅在相互邻接的领域产生，而且在相距很远的领域之间也不断产生。边缘学科的一个共同特点是，应用一门科学的方法去研究另外一门科学的对象，使得不同的科学方法和对象有机地结合起来。边缘学科的出

现正是物质运动形式相互转化的反映。研究它们，不但对弄清楚各门科学的一般关系十分重要，而且对于深刻揭示每种物质运动形式的实质，都有非常重大的意义。

数学在向外部领域渗透的同时，数学内部不同分支的相互渗透也空前加剧，数学中新兴综合学科与内部交叉学科不断涌现。例如，在古典拓扑学中引进抽象代数方法后产生了现代纯粹数学的核心部门之一——代数拓扑学；流形上的几何、拓扑与微分方程的综合研究，形成了一门新分支"大范围分析"。确定性数学(数学分析)与随机性数学(概率论)相互渗透，从而产生了随机微分方程、随机积分论等学科。至于不同数学分支在概念、方法上的相互渗透就更为普遍了。现代偏微分方程论广泛借助泛函分析、微分几何与拓扑学等工具；数论方法在数值分析、数理统计中得到深刻应用；代数几何学在概念与方法上与数论、解析几何、微分几何、拓扑学、代数群论等众多的分支都有密切联系，现代数学中恐怕很难找到哪一门分支完全不采用其它部门的方法与成果了。

此外，现代数学在对象、概念与方法的扩张、渗透过程中还产生了一些完全新颖的分支。如用数理逻辑的方法对经典数学分析(亦称标准分析)的基础重新考察引出了"非标准分析"学科；用拓扑学的方法研究不连续现象，产生了突变理论；用集合论方法研究模糊性现象，产生模糊性数学。这些数学分支大都形成了本世纪60年代后，尚处在初创阶段，它们一方面需要借助于其它数学分支的概念与方法，一方面在数学内部和其它科学技术领域有广泛应用，因而又加速了数学科学内外渗透的趋势。

数学各分支间的相互渗透，加强了现代数学统一化与整体化的倾向，现代数学分支越分越细，数学王国的领域变得越来越大的同时，数学家们经常依据数学各领域间潜在的共性，提出统一数学各部门的新方案，从而推动数学整体化的趋势。

4．电子计算机与数学的革命

电子计算机的出现为现代数学的发展带来革命性的变化，它

对数学有不可估量的影响。由于现代计算机极大地提高了人们的计算能力。目前，即使是一台中型的计算机，也能将人的计算速度提高约 6 个数量级，这样高的计算速度，必然引起数学研究在观念与方式上的深刻变革。

首先，计算机可以做某些数学定理的烦琐而复杂的证明。例如，轰动一时的"四色定理"的证明(四色定理是说：如果有公共边界线的相邻两国不许用同一种颜色，为一幅地图着色至多四种颜色就够了)。四色问题自 1852 年提出后 100 多年没有解决，而 1976 年终于被美国依利诺大学的两位数学家在计算机上解决了，他们的证明，一共花费了 1200 个计算机工作小时。正如数学界评论的那样，这项工作最重要的意义，不在于证明了四色定理，而在于运用电子计算机完成了这件人没有能完成的事情，也就是提供了用计算机研究数学的范例。又如我国吴文俊教授用计算机证明微分几何定理等。计算机通过小型化将成为每个数学家的"囊中之物"，就可以使数学家从某些烦琐逻辑推理的脑力劳动中解放出来，把聪明智慧用到创造性工作上去。所以，计算机对现代数学研究最重大的影响，也许在于把人的思维化作机械的算法过程，直接用计算机代替人脑从事数学证明，也就是所谓"机器证明"。把人类的演绎思维机械化的梦想始于 17 世纪的莱布尼茨，但只有高速电子计算机才有可能使这种梦想变为现实。现代机器证明的研究已取得令人鼓舞的进展。

其次，电子计算机为数学家进行科学实验提供了一个有力工具。计算机为大型工程技术项目的设计，提供了选取最佳方案的巨大可能性。这就是我们今天常常听到的关于出现了"电子计算机进行设计"的新专业这一说法。现代工程技术项目，往往都是投资大，周期长，因此，设计方案的选择就显得十分关键。例如，我国油田开发某区时，原已制订一个方案，后来用电子计算机算了两千多个方案，经过筛选，最后确定了一个最佳方案。可见，计算机进行科学实验的潜力是相当大的。又如美国数学家乌拉，为了探讨非线性微分方程孤立子解，在电子计算机上进行试

验，首先在电子计算机的荧光屏上发现了一些新规律。

还有，计算机迹引起数学中离散化倾向的增长，也就是推动了研究离散结构的数理逻辑、图论、组合理论、代数系统以及进行离散数值处理的数值分析等学科的发展。计算机的使用还极大地扩展了数学应用的范围与威力。最后，新型计算机的设计、制造以及使用也向数学本身提出各种新的课题，促进了数学分支的发展。

计算机可以促进数学研究的集体化，过去数学家的传统研究方式是单干。计算机普及，可将数学成果的信息迅速存取，使数学工作者耳聪目明，还可以把各个数学工作者的各种探索过程也存在"集体数据库"中，通过终端机使彼此的工作相互联系，便于取长补短，获得更多科研成果。

总之，科学家们已普遍感到计算机必将引起数学与整个科学技术的革命。计算机作为人脑的延伸，对于数学势将成为与显微镜之于生物学、望远镜之于天文学家一样强有力的工具。正如有的数学家展望的那样："计算机正在开辟一个数学研究的新时代"。

本书主要参考书目

1. (苏)亚历山大洛夫著:《数学——它的内容、方法和意义》(第一、二、三卷),科学普及出版社 1958 年版。

2. (美)M·克莱因著:《古今数学思想》第一至四卷,上海科学技术出版社 1982 年版。

3. (美)J. 斯特洛伊克著:《数学简史》,科学出版社,1956年版。

4. (苏)B. 鲍尔加尔斯基著:《数学简史》,知识出版社 1984年版。

5. (英)斯科特著:《数学史》,商务印书馆 1981 年版。

6. 梁宗巨著:《世界数学史简编》,辽宁人民出版社 1980 年版。

7. 张奠宙、赵斌编著:《二十世纪数学史话》,知识出版社 1984年版。

8. 朱道生等著:《数学分支巡礼》,中国青年出版社 1983 年版。

9. 周金才、梁兮编著:《数学的过去、现在和来来》,中国青年出版社 1982 年版。

10. (美)奥尔著:《有趣的数论》,北京大学出版社 1985 年版。

11. (美)斯蒂恩主编:《今日数学》,上海科学技术出版社 1982 年版。

12. 刘永振著:《数学方法》,辽宁科技出版社 1985 年版。

13. 徐利治著:《数学方法论选讲》,华中工学院出版社 1988年版。

14. 夏道行、吴卓人等著:《实变函数与泛函分析》,高等教

育出版社 1983 年版。

15. 西安交通大学高等数学教研室：《复变函数》高等教育，出版社 1981 年版。

16. 潘宇鹏著：《辩证逻辑与科学方法论》，西安交通大学出版社1980年版。

17. 王浩著：《数理逻辑通俗讲话》，科学出版社 1983 年版。

18. 莫绍揆著：《数理逻辑初步》，上海人民出版社 1980 年版。

19. 楼世博等著《模糊数学》，科学出版社 1985 年版。

20. 《美》扎德著：《模糊集合、语言变量及模糊逻辑》，科学出版社 1984 年版。

21. 苗东升编著：《模糊学导引》，中国人民出版社 1987 年版。

22. (法)勒内、托姆著：《突变论：思想和应用》、上海译文出版社 1989 年版。

23. (日)高安秀树著：《分数维》，地震出版社 1989 年版。

24. 李后强、程光钺著：《分形与分维》，四川教育出版社。

25. 郝柏林著：《分形和分维》，《科学》杂志 1986 年第 38 卷第 1 期。

26. (德)韦德里希哈格著：《定量社会学》，四川人民出版社 1986 年版。

27. (苏)科瓦利琴科主编：《计量历史学》，四川人民出版社 1987 年版。

28. 胡作玄著：《第三次数学危机》，四川人民出版社 1985 年四川人民出版社。

29. 夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，人民出版社1986年版。

30 林夏水主编：《数学哲学译文集》，知识出版社 1986 年版。

31．张绥著：《数学与哲学》，学林出版社 1988 年版。

32．(美)史蒂芬·巴克尔著：《数学哲学》，生活·读书·新知三联书店 1989 年版。

33．傅世侠主编：《科学前沿的哲学探索》，辽宁人民出版社 1983 年版。

34．列风璞等编：《数学若干辩证内容简析》，人民教育出版社 1980 年版。

35．《中国大百科全书——数学》，中国大百科全书出版社 1988 年版。

36．(美)P．D库克著：《现代数学史》，内蒙古人民出版社，1982 年版。

37．张素亮主编：《数学史简编》，内蒙古人民出版社，1990 年版。

38．周述岐著：《微积分思想简史》，中国人民大学出版社，1987 年版。

39．(美)卡尔·B·波耶著：《微积分概念史》，上海人民出版社，1977 年版。

40．(美)波利亚著：《数学与猜想》，科学出版社、1984 年版。

41．(瑞典)戈丁著：《数学概观》，科学出版社，1985 年版。

42．(美)丹齐克著：《数——科学的语言》，商务印书馆，1985 年版。

43．张家龙著：《公理学、元数学与哲学》，上海人民出版社，1983 年版。

44．华罗庚著：《华罗庚科普著作选集》，上海教育出版社，1984 年版。

45．钱学森、许国志等著：《系统工程普及讲座汇编》(下)，中国科协普及部，1980 年印。

46．(苏)A·П·诺尔金著：《罗巴切夫斯几何学初步》，高等

教育出版社，1956年版。

47．周述岐编：《概率论》讲义，中国人民大学出版社，1987年版。

48．相宗磐著：《概率论入门》，科学出版社，1981年版。

49．《运筹学》编写组编：《运筹学》，清华大学出版社，1989年版。

50．陈兰荪主编：《生物数学引论》，科学出版社，1988年版。

51．李晓明著：《模糊性：人类认识之谜》，人民出版社，1987年版。

52．袁运开主编：《自然科学方法研究》（1），华东师范大学出版社，1988年版。

52．陶承德主编：《现代科学方法论》，河南人民出版社，1987年版。

53．吴文俊：《对中国传统数学的再认识》（上）（下），载于《百科知识》杂志，1987年第7期。

54．张胜友：《他从高山走向大地——华罗庚推广统筹法、优选法纪事》，《光明日报》1985年8月28日。

55．谢力同：《运筹学的起源和发展之我见》，载于《百科知识》杂志，1986年11期。

56　谢科范：《对策论浅谈》，载于《光明日报》1986年10月29日。

57．游光荣：《对策论浅说》，载于《现代化》杂志，1989年第2期。

58．李文林：《数学与产业革命》，载于《科技日报》1987年12月24日。

59．李文林：《法国大革命与数学》，载于《科学、技术与辩证法》杂志，1986年第2期。

60．Robert L.Long：《对数学史和数学哲学的看法》，载于《自然》杂志，1987年第9期。

表

61．伍铁平：《模糊理论的诞生及其意义》(上)(，载下)于《百科知识》杂志，1987年第1、2期。

62．孙定灿：《模糊数学的认识论意义》，载于《绍兴师专学报：社科版》杂志，1988年第3期。

63．沈骊天：《突变理论与社会控制》，载于《光明日报》1987年2月11日。

64．都兴富：《突变数学与经济决策》，载于《经济学周报1987年7月26日。

65．赵松年：《突变理论的发展及其应用》，载于《中国科学报》1989年1月6日。

66．徐云从：《数学基础问题——直觉主义》，载于《百科知识》杂志，1985年第6期。

67．徐云九：《数学基础问题——罗素与逻辑主义》，载于百科知识》杂志，1985年第7期。

68．王前：《科学数学化的哲学化意义》，载于《社会科学辑刊》(沈阳)，1987年第5期。

69．周江雄：《经济科学与数学》，载于《财经理伦与实践》杂志，1987年第2期。

70．赵德志：《论经济学的数学化》，载于《学习与探索》(哈尔滨)杂志，1986年第4期。

71．姜璐、郭治安、沈小峰：《一门崭新的交叉学科——定量社会学》，载于《光明日报》，1986年3日26日。

01-0
8
382077

表

61. 伍铁平：《模糊理论的诞生及其意义》(上)(下)，载于《百科知识》杂志，1987 年第 1、2 期。

62. 孙定灿：《模糊数学的认识论意义》，载于《绍兴师专学报：社科版》杂志，1988 年第 3 期。

63. 沈骊天：《突变理论与社会控制》，载于《光明日报》1987 年 2 月 11 日。

64. 都兴富：《突变数学与经济决策》，载于《经济学周报》1987 年 7 月 26 日。

65. 赵松年：《突变理论的发展及其应用》，载于《中国科学报》1989 年 1 月 6 日。

66. 徐云从：《数学基础问题——直觉主义》，载于《百科知识》杂志，1985 年第 6 期。

67. 徐云九：《数学基础问题——罗素与逻辑主义》，载于《百科知识》杂志，1985 年第 7 期。

68. 王前：《科学数学化的哲学化意义》，载于《社会科学辑刊》(沈阳)，1987 年第 5 期。

69. 周江雄：《经济科学与数学》，载于《财经理伦与实践》杂志，1987 年第 2 期。

70. 赵德志：《论经济学的数学化》，载于《学习与探索》(哈尔滨)杂志，1986 年第 4 期。

71. 姜璐、郭治安、沈小峰：《一门崭新的交叉学科——定量社会学》，载于《光明日报》，1986 年 3 日 26 日。

01-0
8
0382077